

フィードバック制御入門 第9章

第9章 :2 自由度制御系

9.1 フィードフォワードとフィードバックの役割

キーワード : フィードフォワード, フィードバック

9.2 2 自由度制御系の構造と設計法

キーワード : 2 自由度制御

学習目標 : フィードフォワードとフィードバックのそれぞれの役割を理解し, これら 2 つの長所を併せ持つ 2 自由度制御系の構造と設計を理解する.

1

第9章 :2 自由度制御系

9.3 安定化制御器のパラメータ表現

キーワード : 制御器のパラメータ表現

9.4  $H_\infty$  制御による自由パラメータの選択

キーワード :  $H_\infty$  制御

学習目標 : 安定化制御器のパラメータ表現を学び,  $H_\infty$  制御によるパラメータの決定法について習得する.

2

9.2 自由度制御系

9.1 フィードフォワードとフィードバックの役割

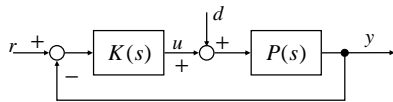


図 9.1 フィードバック制御系

フィードバックの利点

- a. 外乱の影響を抑制
- b. 特性変動の影響を低減
- c. 不安定系を安定化
- d. 目標値応答の整形 ?

3

[例 9.1]

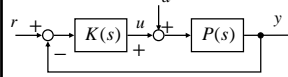


図 9.1 フィードバック制御系

制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad (\text{不安定系})$$

コントローラ

$$K(s) = \frac{4s+6}{s} \quad (\text{PI補償})$$

a: 外乱の影響を抑制 OK

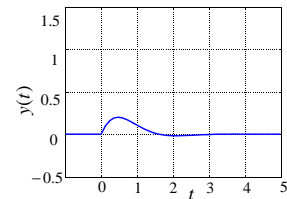
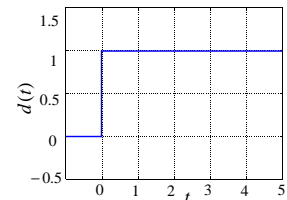


図 9.2 (a) ステップ外乱応答

4

[例 9.1]

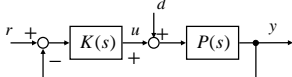


図 9.1 フィードバック制御系

制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad (\text{不安定系})$$

コントローラ

$$K(s) = \frac{4s+6}{s} \quad (\text{PI補償})$$

- b. 特性変動の影響を低減 OK
- c. 不安定系を安定化 OK

$$P \rightarrow \tilde{P}(s) = \frac{20}{(s-1)(s+20)}$$

変動  
オーバーシュート大  
 $K(s)$  は  $r$  を情報として使わず  
 $e = r - y$  のみ用いている!!

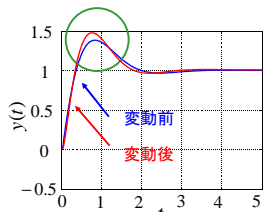


図 9.2 (b) 目標値応答 ( $r=1$ )

5

フィードフォワードの利点

$G_M(s)$  : 望ましい目標値応答を有するモデル伝達関数

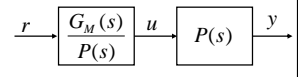


図 9.3 フィードフォワード制御系

$$u(s) = \frac{G_M(s)}{P(s)} r(s) : r \text{ のみ用いる}$$

$$\therefore y(s) = G_M(s) r(s)$$

- d: 目標値応答の整形 OK
- a. 外乱の影響を抑制
- b. 特性変動の影響を低減
- c. 不安定系を安定化

➡ 2 自由度制御系へ

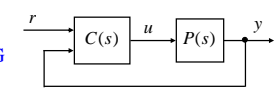


図 9.4 2自由度制御系 (一般系)

6

# フィードバック制御入門 第9章

9.2 2自由度制御系の構造と設計法

$y(s) = P(s)u(s)$

フィードフォワード制御  
 $u_{ff}(s) = \frac{F(s)}{P(s)}r(s)$

$F(s)$ : 設計パラメータ  
 (望ましい目標値応答  $r \rightarrow y$ )

$u = u_{ff}$  とすれば

$y = \cancel{P} \cdot \frac{F}{\cancel{P}} r = Fr$

図 9.4 2自由度制御系 (一般系)

7

フィードバック制御

$u_{fb}(s) = K(s)(F(s)r(s) - y(s))$

以上より  
 $u(s) = u_{ff}(s) + u_{fb}(s)$

とおく

$\left[ u_{ff}(s) = \frac{F(s)}{P(s)}r(s) \right]$

図 9.5 2自由度制御系 (一般系)

8

モデル化誤差がない場合

$y = Fr$  より

$u_{fb} = K(Fr - Fr) = 0$

$\therefore G_{yr}(s) = F(s)$

モデル化誤差がある場合

$y \neq Fr$  より

フィードバックKの効果

- ・  $F(s)$ : 目標値応答を指定
- ・  $K(s)$ : フィードバック特性を指定
- ・ 互いに独立

条件付きフィードバック構造

図 9.5 条件付きフィードバック構造

9

[例 9.2]

制御対象  
 $P(s) = \frac{1}{s-1}$

変動  $\tilde{P}(s) = \frac{20}{(s-1)(s+20)}$

フィードバックコントローラ  
 $K(s) = \frac{4s+6}{s}$

フィードフォワードコントローラ  
 $F(s) = \frac{1}{\tau s+1} \quad (\tau=0.3)$

[例 9.1] と比べてみると、  
 a ~ c OK & d OK

図 9.2 (b) 目標値応答 ( $r=1$ )

図 9.6 2自由度制御系の目標値応答例

10

[例 9.3]

制御対象  
 $P(s) = \frac{1}{s}$  変動  $\tilde{P}(s) = \frac{15}{s(s+25)}$

コントローラ  $K(s) = K_0$  (定数)

コントローラの条件

フィードバックのみ  $K_0 = 1$  (制限)

2自由度  $F(s) = \frac{1}{s+1}, K = 8$

図 9.7 (a) フィードバック系

図 9.7 (b) 2自由度制御系

11

制御系の安定条件

(I)  $F(s)$  が安定,  $P^{-1}(s)F(s)$  が安定

(II)  $P(s)$  と  $K(s)$  からなる閉ループ系が安定

図 9.5 条件付きフィードバック構造

12

# フィードバック制御入門 第9章

## 2自由度制御系の設計手順

- [ステップ1] 目標値応答の観点から、 $F(s)$  を安定条件の範囲内で選ぶ。
- [ステップ2] フィードバック特性の観点から、ループ整形法等を用い、 $K(s)$ を内部安定性を満たす範囲で設計する。
- [ステップ3] 上記の  $F(s), K(s)$  を、図 9.5 のように組み合わせる。

13

## 9.3 安定化制御器のパラメータ表現

### 制御系の安定条件

- (I)  $F(s)$  が安定、 $P^{-1}(s)F(s)$  が安定 (9.13)
- (II)  $P(s)$  と  $K(s)$  からなる閉ループ系が内部安定

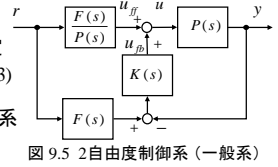


図 9.5 2自由度制御系 (一般系)

$F(s), K(s)$  を漏れなく簡潔に表現するとは？

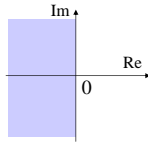
↓  
設計が容易

14

### [復習]

#### 伝達関数が安定

複素閉右半面に極をもたず、かつプロパー†  
† 伝達関数の分母の次数が分子の次数より大きいまたは等しい ( § 3.1, pp. 39)

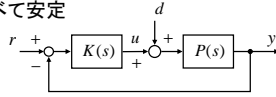


#### $P(s)$ と $K(s)$ からなる閉ループ系が内部安定 ( § 6.1, pp. 107)

以下の四つの伝達関数がすべて安定

$$\frac{K(s)}{1+P(s)K(s)}, \quad \frac{-P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \quad (9.14)$$

$$\frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}, \quad \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} \quad (9.15)$$



15

### [定理9.1] 安定化制御器のパラメータ表現

図9.5の2自由度制御系において、 $P(s)$  が安定であると仮定する。このとき制御系を安定化する任意の  $F(s)$  と  $K(s)$  に対して、次式を満たす安定な伝達関数  $R(s)$  と  $Q(s)$  が存在する。逆に  $R(s)$  と  $Q(s)$  を任意の安定な伝達関数に選んだとき、次式で計算される  $F(s)$  と  $K(s)$  は制御系を安定化する。

$$F(s) = P(s)R(s) \quad (9.16)$$

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1-P(s)Q(s)} \quad (9.17)$$

$R(s)$  : 安定       $Q(s)$  : 安定

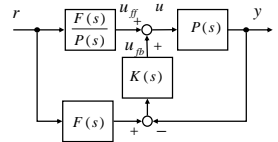


図 9.5 2自由度制御系 (一般系)

16

### [証明]

制御系を安定化する任意の  $F(s)$  と  $K(s)$  を用いて、安定な伝達関数  $R(s)$  と  $Q(s)$  が存在することを示す。

$F(s)$  と  $K(s)$  は制御系を安定化しているとする。

#### $R(s)$ の存在について

制御系の安定条件 (I) の式 (9.13) より

$$R(s) = P^{-1}(s)F(s)$$

とおけば、これは安定でかつ式 (9.16)  $F(s) = P(s)R(s)$  を満たす。

#### 制御系の安定条件

$$\begin{aligned} \text{(I) } F(s) \text{ が安定,} \\ P^{-1}(s)F(s) \text{ が安定} \end{aligned} \quad (9.13)$$

#### $Q(s)$ の存在について

閉ループ系の内部安定性より式 (9.17) を  $Q(s)$  について逆に解くと

$$Q(s) = \frac{K(s)}{1+P(s)K(s)} \quad \Leftarrow \quad K(s) = \frac{Q(s)}{1-P(s)Q(s)} \quad (9.17)$$

となり、これは安定となる。

17

### [証明] (続き)

$R(s)$  と  $Q(s)$  を任意の安定な伝達関数に選んだとき、次式で計算される  $F(s)$  と  $K(s)$  は制御系を安定化することを示す。

#### 制御系の安定条件 (I) について

$R(s)$  と  $P(s)$  が安定なとき、 $F(s) = P(s)R(s)$  とおけば

$$F(s) : \text{安定}, \quad P^{-1}(s)F(s) (= R(s)) : \text{安定} \quad \Rightarrow \quad \text{制御系の安定条件 (I) 式 (9.13) が成立}$$

#### 制御系の安定条件 (II) について

式 (9.17)  $K(s) = \frac{Q(s)}{1-P(s)Q(s)}$  を式 (9.14), (9.15) に代入

$$\frac{K(s)}{1+P(s)K(s)} = Q(s) \quad (9.20) \quad \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = P(s)Q(s) \quad (9.22)$$

$$\frac{-P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = -P(s)Q(s) \quad (9.21) \quad \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} = P(s)(1-P(s)Q(s)) \quad (9.23)$$

$P(s)$  と  $Q(s)$  が安定なとき、四つの伝達関数は安定であり、閉ループ系は内部安定性を満たす (制御系の安定条件 (II))

□ 18

# フィードバック制御入門 第9章

## 安定化制御器のパラメータ表現を用いる利点

- 制御系の安定性はパラメータ  $R(s)$  と  $Q(s)$  を安定に選びさえすれば自動的に保証される。
- 閉ループ伝達関数が、式 (9.20) ~ (9.23) および式 (9.16) に見られるように、これらのパラメータの1次式となり、設計の見通しがよい。
- すべての安定化制御器を漏れなく尽くしているため、設計の観点からいえば損失はない。

\* 一般の制御対象  $P(s)$  (安定とは仮定しない) 場合

19

## [例 9.4]

制御対象

$$P(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

目標値応答

$$R(s) = P^{-1}(s) \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad \zeta = 0.8, \omega = 3$$

と選べば  $R(s)$  は安定で、 $F(s)$  は2次系の応答

フィードバック特性

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} = 1 - P(s)Q(s)$$

より  $Q(s) = P^{-1}(s) \frac{1}{(\tau s + 1)^2}$  と選べば

$$S(s) = \frac{\tau(s+2)}{(\tau s + 1)^2} \quad \tau = 0.1$$

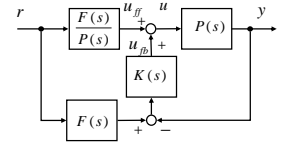


図 9.5 2自由度制御系 (一般系)

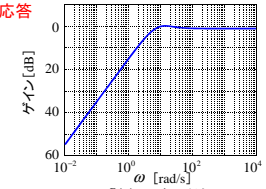


図  $S(s)$  のボード線図

20

## 2自由度コントローラ

$$F(s) = P(s)R(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{2((\tau s + 1)^2 - 1)}$$

$$P(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$\tilde{P}(s) = \frac{3}{(s+0.8)(s+3)}$$

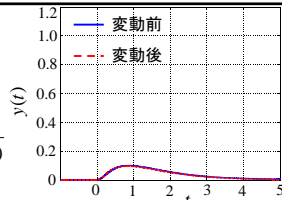


図 9.8 (a) 外乱応答

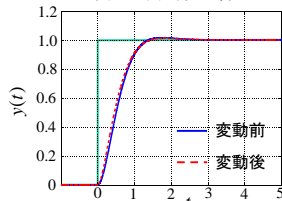


図 9.8 (b) 目標値応答

21

## 9.4 $H_\infty$ 制御による自由パラメータの選択

パラメータ表現された制御器の中から与えられた制御性能を実現するものを選ぶ方法

フィードフォワード制御器

$$F(s) = P(s)R(s)$$

目標値応答から  $R(s)$  を与える

比較的容易

フィードバック制御器

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$

感度特性, ロバスト安定性を満たす  $Q(s)$  を選択

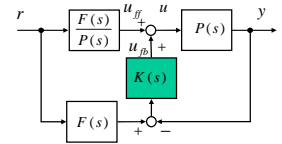


図 9.5 2自由度制御系 (一般系)

22

## 低感度化

$$|W_1 S| < 1, \forall \omega \Rightarrow |W_1| < |1 + L|, \forall \omega$$

$$S = \frac{1}{1 + PK} = \frac{1}{1 + L}$$

$L$  は  $(-1, 0)$  から  $|W_1|$  だけ離れていなければならない

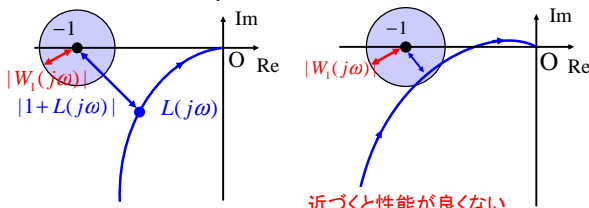


図 7.15 ベクトル軌跡によるノミナル性能

23

## ロバスト安定化

コントローラ  $K(s)$  が集合  $\mathcal{P}$  に属するすべての  $\tilde{P}(s)$  に対して内部安定性を保証すること

不確かなモデル

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)$$

不確かな閉ループ伝達関数

$$\tilde{L}(s) = L(s) + \Delta(s)W_2(s)L(s)$$

任意の  $\tilde{L}$  について、そのベクトル軌跡が点  $(-1, 0)$  をまわらなければ安定

$$|W_2 L| < |1 + L|, \forall \omega$$

$$\frac{|W_2 L|}{|1 + L|} < 1, \forall \omega$$

$$\therefore |W_2 T| < 1, \forall \omega$$

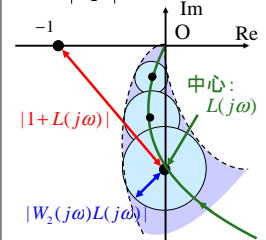


図 7.10 ベクトル軌跡によるロバスト安定性

24

# フィードバック制御入門 第9章

**低感度化**

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \quad \forall \omega$$

$$\Rightarrow |W_1 S| < 1, \quad \forall \omega$$

→ S は小さい方が良い

**ロバスト安定化**

$$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \quad \forall \omega$$

$$\Rightarrow |W_2 T| < 1, \quad \forall \omega$$

→ T は小さい方が良い

← トレードオフ →

ウォーターベッド効果    補間条件  $S+T=1$

**$H_\infty$  制御**

閉ループ系の伝達関数の大きさを  $H_\infty$  ノルムという尺度で測り、これを小さくすることで種々の設計仕様を満たすことを目的とした制御法

**$H_\infty$  ノルム**

周波数伝達関数の最大ゲイン

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|$$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}\{s\} > 0} |G(s)|$$

**[例]  $H_\infty$  ノルム**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1} \quad \omega_n = 1, \quad \zeta = 0.25$$

$G(s)$  のボード線図

周波数伝達関数の最大ゲイン

$$\|G(s)\|_\infty = 2$$

**パラメータの決定**

$P(s)$  が安定なときパラメータ表現を用いることができる

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$

**低感度化**

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1, \quad \forall \omega \quad \Rightarrow \quad \|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} = 1 - P(s)Q(s)$$

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty = \|W_1(s)(1 - P(s)Q(s))\|_\infty = \|W_1(s) - W_1(s)P(s)Q(s)\|_\infty$$

**ロバスト安定化**

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1, \quad \forall \omega \quad \Rightarrow \quad \|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1$$

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = P(s)Q(s)$$

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty = \|W_2(s)P(s)Q(s)\|_\infty$$

**低感度化**

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1$$

$$\Rightarrow \|W_1(s) - W_1(s)P(s)Q(s)\|_\infty < 1$$

$$T_1(s) = W_1(s)$$

$$T_2(s) = -W_1(s)P(s)$$

$$\gamma = 1$$

**ロバスト安定化**

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1$$

$$\Rightarrow \|W_2(s)P(s)Q(s)\|_\infty < 1$$

$$T_1(s) = 0$$

$$T_2(s) = W_2(s)P(s)$$

$$\gamma = 1$$

↓

よって、 $H_\infty$  ノルムで表現された制御性能は次式で表せる

**モデルマッチング問題**     $\|T_1(s) + T_2(s)Q(s)\|_\infty < \gamma$

- \* 自由パラメータ  $Q(s)$  の決定法
- \* 一般的なモデルマッチング問題

$$\|T_1(s) + T_2(s)Q(s)T_3(s)\|_\infty < \gamma$$