

フィードバック制御入門 第7章

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.1 不確かさとロバスト性

キーワード： ロバスト性, モデルの不確かさ, ノミナルモデル, モデル集合

学習目標： 制御系のロバスト性解析として、まずモデルとそれに含まれる不確かさの概念を理解する。モデルの不確かさの記述法を習得する。

1

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.2 ロバスト安定性

キーワード： ロバスト安定性, 相補感度関数

7.3 制御性能のロバスト性

キーワード： ノミナル性能, 感度関数, ロバスト性能

学習目標： モデルの不確かさの記述法を習得し、ロバスト安定性について、その性質と条件を理解する。また、制御性能のノミナル性能, ロバスト性能について学ぶ。

2

7. フィードバック制御系のロバスト性解析

7.1 不確かさとロバスト性

ロバスト(robust)： 強い, 頑健な, 丈夫な...

モデルの不確かさ

- パラメータ値の誤差
- モデル化されない動特性
- 考慮されない非線形性
- 外乱 / 雑音
- 動作範囲 / 環境の変化

現実のシステム

↑ ↓

モデル: $P(s)$

3

[例 7.1] 高次の振動モード

図 ハードディスク

1次系 (制御対象)

$$P(s) = \frac{1}{5s+1}$$

開ループ伝達関数

$$L(s) = \frac{K}{5s+1} = P(s)K$$

定数ゲイン

$$K = 1$$

4

[例 7.1]

[復習] ゲイン余裕 GM

図 7.1 (a) $L(s) = \frac{1}{5s+1}$ のベクトル軌跡

5

[例 7.1]

制御対象 $P(s) = \frac{1}{5s+1}$

↓

実際の制御対象 $\tilde{P}(s) = \frac{1}{5s+1} \cdot \frac{4}{s^2+2s+4}$

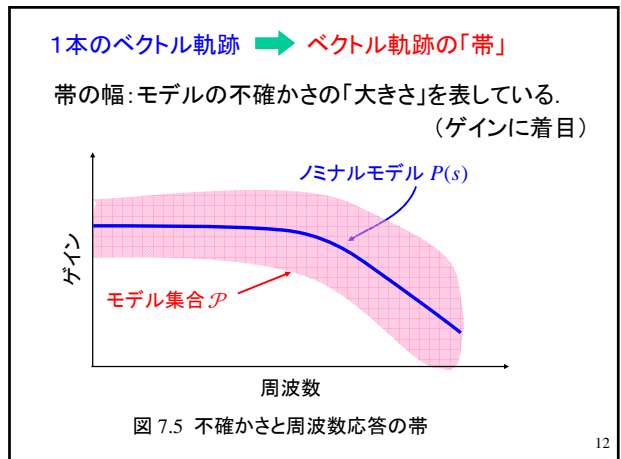
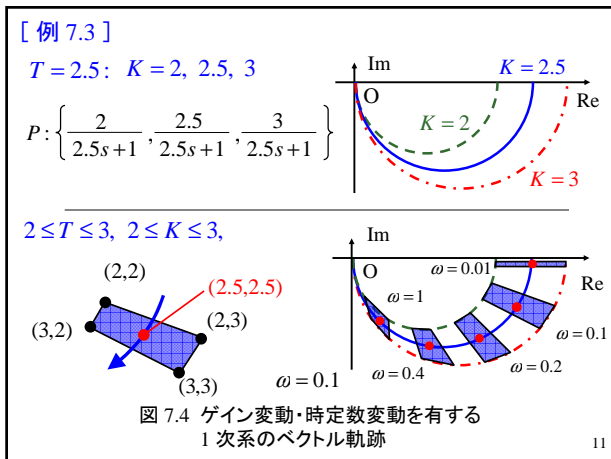
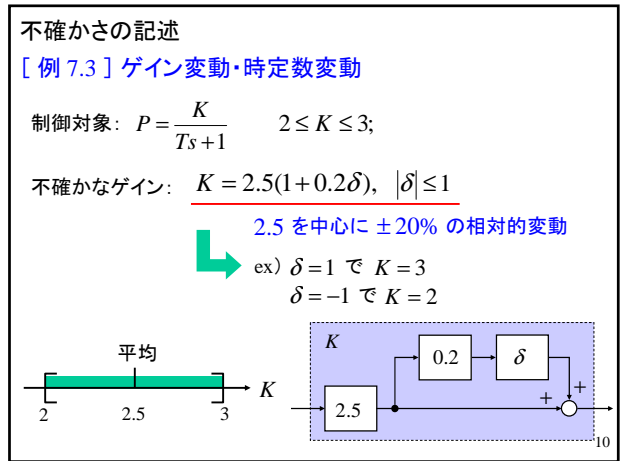
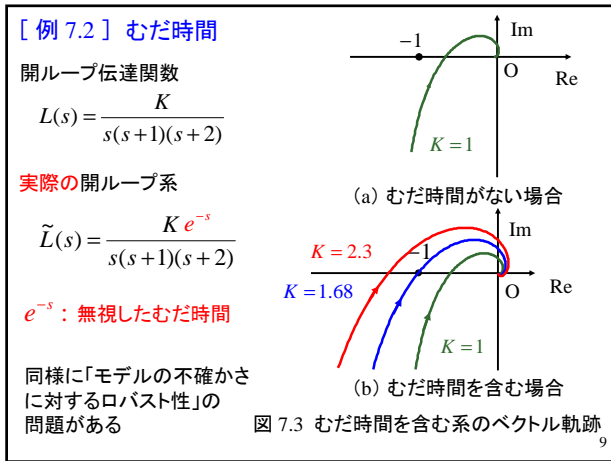
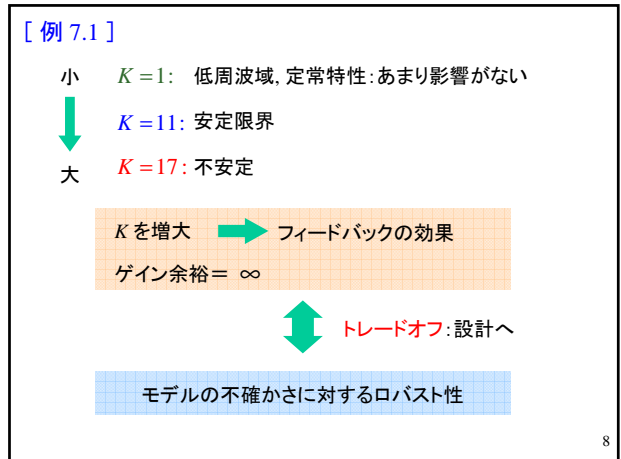
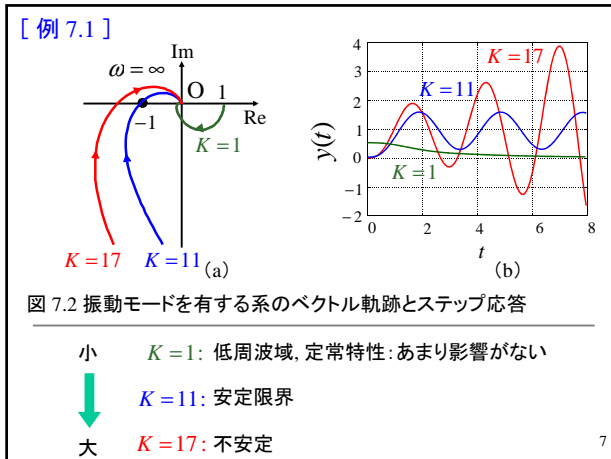
振動モード

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [\zeta = 0.5, \omega_n = 2]$$

図3.7 2次系のステップ応答

6

フィードバック制御入門 第7章



フィードバック制御入門 第7章

不確かなシステム (cf. 不確かなゲイン)

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s) \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega$$

公称モデル (ノミナルモデル)

$W_2(s)$: 不確かさの「大きさ」を記述 (ゲインに着目)

$\tilde{P}(s) \in \mathcal{P}$: モデル集合

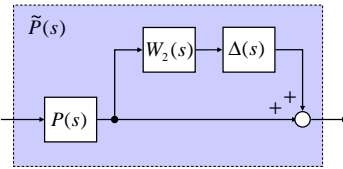
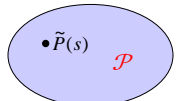



図 7.6 乗法的な不確かさとモデル集合₃

乗法的な不確かさ

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)$$

$$\frac{\tilde{P}}{P} - 1 = \frac{\tilde{P} - P}{P} = \Delta W_2$$

(\Leftrightarrow 加法的な不確かさ)
cf. 演習問題[3]

円盤型の不確かさ

$$|\tilde{P} - P| = |\Delta W_2 P| \leq |W_2 P|$$

($\because |\Delta| \leq 1$)

cf. 周波数応答軌跡の「帯」を囲む

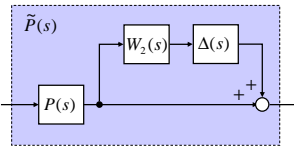
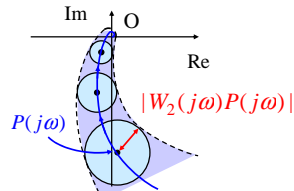
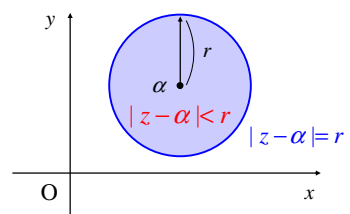



図 7.7 乗法的な不確かさとモデル集合のベクトル軌跡₁₄

復習

点 α を中心とする半径 r の円 C の内部の点 z は、 z と α の距離 $|z - \alpha|$ が r より小さい点の集合だから、不等式 $|z - \alpha| < r$ を満たす。



15

[復習] 不確かなシステム (cf. 不確かなゲイン)

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s) \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega$$

公称モデル (ノミナルモデル)

$W_2(s)$: 不確かさの「大きさ」を記述 (ゲインに着目)

$\tilde{P}(s) \in \mathcal{P}$: モデル集合

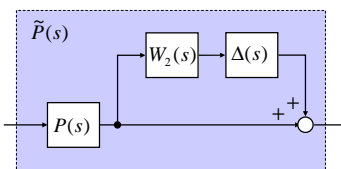


図 7.6 乗法的な不確かさとモデル集合₆

[例 7.4] むだ時間変動

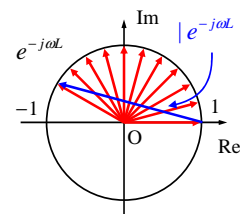
$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s+1} e^{-sL}, \quad 0 \leq L \leq 1$$

ノミナルモデル $P(s) = \frac{1}{s+1}$

乗法的な不確かさの大きさ $\left| \frac{\tilde{P}}{P} - 1 \right| = \left| \frac{\tilde{P} - P}{P} \right| = |e^{-j\omega L} - 1|$

乗法的な不確かさの大きさ (の上限値)

$$0 \leq \omega < \pi: |e^{-j\omega L} - 1| \leq |e^{-j\omega} - 1|$$

$$\omega \geq \pi: |e^{-j\omega L} - 1| \leq 2 \quad (\because 0 \leq L \leq 1)$$


17

[例 7.4]

乗法的な不確かさの大きさ (の上限値)

$$0 \leq \omega < \pi: |e^{-j\omega} - 1|$$

$$\omega \geq \pi: 2$$

不確かさの周波数重み

$$W_2(s) = \frac{2.1s}{s+1}$$

起こりうる不確かさをすべてカバーしている。

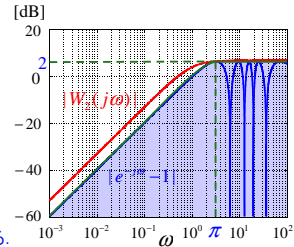


図 7.8 むだ時間変動に対する周波数重み関数

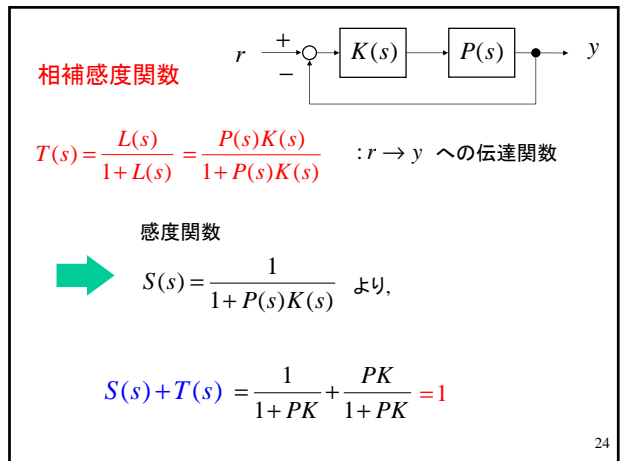
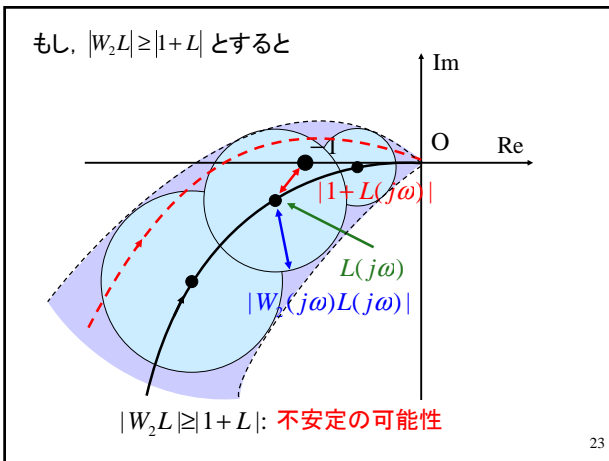
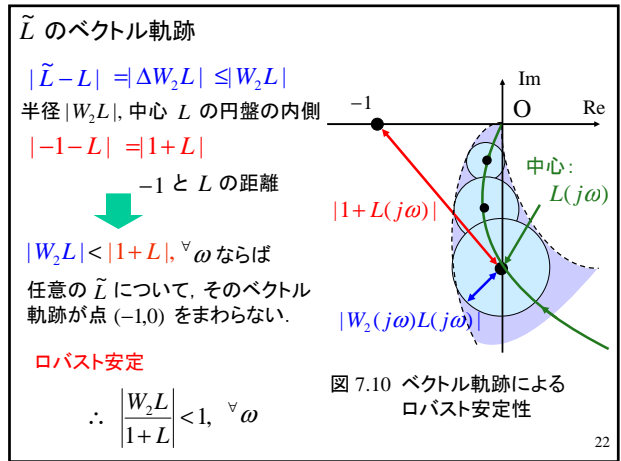
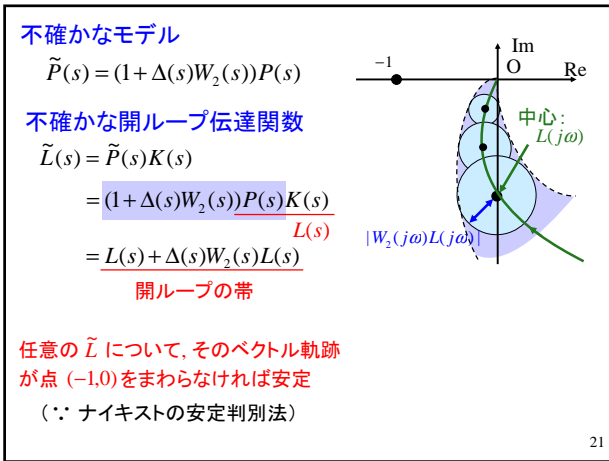
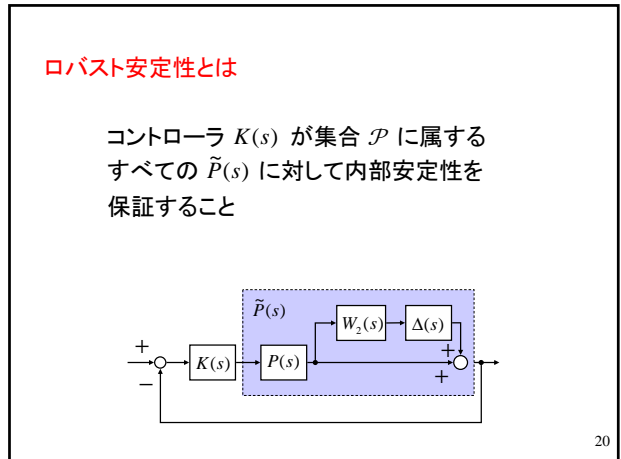
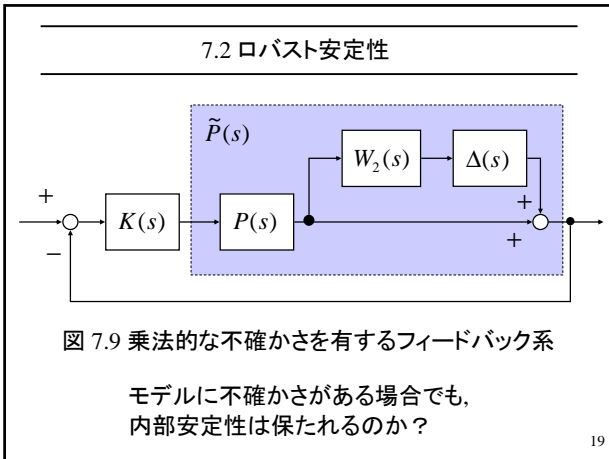
$P(s) = \frac{1}{s+1}, W_2(s) = \frac{2.1s}{s+1}$ として、

モデル集合 $\mathcal{P} = \{(1 + \Delta(s)W_2(s))P(s) \mid |\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega\}$ を考えると、

任意の $\tilde{P}(s) = \frac{1}{s+1} e^{-sL}, 0 \leq L \leq 1$ はこのモデル集合の中に含まれる。

18

フィードバック制御入門 第7章



フィードバック制御入門 第7章

相補感度関数を用いると

$$\left| \frac{W_2 L}{1+L} \right| < 1, \forall \omega$$

$$\Rightarrow |W_2 T| < 1, \forall \omega$$

よって,

$$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \forall \omega$$

→ T は小さい方が良い

図 7.11 相補感度関数とロバスト安定性

25

図 7.12 ロバスト安定性と小ゲイン定理

26

図 7.12 ロバスト安定性と小ゲイン定理

27

7.3 制御性能のロバスト性

ノミナル性能

図 7.13 フィードバック制御系

$$\Delta_T = \frac{1}{1+PK} \Delta_p: \text{パラメータ変動に対する感度}$$

$$y = \frac{1}{1+PK} d: \text{外乱に対する感度}$$

$$e = \frac{1}{1+PK} r: \text{(目標値応答)}$$

28

フィードバック性能の指標

$S = \frac{1}{1+PK}$: 小さい方がよい

[例] 外乱 d (ω_0 以下): $\frac{1}{100}$ 未満にしたい

$y = Sd$ より

$$|S| < \frac{1}{100}, \forall \omega \leq \omega_0$$

$$|W_1| \geq 100, \forall \omega \leq \omega_0$$

$W_1(s)$: 重み関数

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \forall \omega$$

$$\Rightarrow |W_1 S| < 1, \forall \omega$$

ノミナル性能

図 7.14 感度関数とノミナル性能

ウォーターベッド効果

すべての周波数帯域で感度関数 S を小さくできない

ボードの感度積分 (安定, 相対次数 2 以上)

$$\int_0^\infty \log |S(j\omega)| d\omega = 0$$

$|S| < 1$ ($\log |S| < 0$)

ならば, 別の周波数帯で

$|S| > 1$ ($\log |S| > 0$)

となる

性能の限界

$$S + T = 1 \quad \left[S = \frac{1}{1+PK}, T = \frac{PK}{1+PK} \right]$$

図 7.17 ウォーターベッド効果

30

フィードバック制御入門 第7章

7章 演習問題【6】

制御対象 $P(s)$ の不安定極を p 、不安定零点を z としたとき、

$S(p) = 0, T(p) = 1$

$S(z) = 1, T(z) = 0$

なる条件(補間拘束)を満たさなければならない

性能の限界

$S + T = 1$

$$\left[S = \frac{1}{1+PK}, T = \frac{PK}{1+PK} \right]$$

感度関数 $S(s) = \frac{1}{1+P(s)K(s)}$

拘束条件 $S + T = 1$

$S(p) = 0$

$P(p) = \infty$

$S(p) = \frac{1}{1+P(p)K(p)} = 0$

$S(z) = 1$

$P(z) = 0$

$S(z) = \frac{1}{1+P(z)K(z)} = \frac{1}{1} = 1$

不安定な極零相殺しない

31

【復習】フィードバック性能の指標

$S = \frac{1}{1+PK}$: 小さい方がよい

【例】 外乱 d (ω_0 以下): $\frac{1}{100}$ 未満にしたい

$y = Sd$ より

$|S| < \frac{1}{100}, \forall \omega \leq \omega_0$

$|W_1| \geq 100, \forall \omega \leq \omega_0$

$W_1(s)$: 重み関数

$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \forall \omega$

$\Rightarrow |W_1 S| < 1, \forall \omega$

ノミナル性能

図 7.14 感度関数とノミナル性能

$|W_1 S| < 1, \forall \omega \Rightarrow |W_1| < |1+L|, \forall \omega$

$\left[S = \frac{1}{1+PK} = \frac{1}{1+L} \right]$

L は $(-1,0)$ から $|W_1|$ だけ離れていなければならない

図 7.15 ベクトル軌跡によるノミナル性能

33

【復習】ロバスト安定性

$|W_2 L| < |1+L|, \forall \omega$

$\frac{|W_2 L|}{|1+L|} < 1, \forall \omega$

$\therefore |W_2 T| < 1, \forall \omega$

コントローラ $K(s)$ が集合 \mathcal{P} に属するすべての $\tilde{P}(s)$ に対して内部安定性を保証すること

不確かなモデル

$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)$

不確かな開ループ伝達関数

$\tilde{L}(s) = L(s) + \Delta(s)W_2(s)L(s)$

任意の \tilde{L} について、そのベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ をまわらなければ安定

図 7.10 ベクトル軌跡によるロバスト安定性

34

ノミナル性能

$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \forall \omega$

$\Rightarrow |W_1 S| < 1, \forall \omega$

S は小さい方がよい

ロバスト安定性

$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \forall \omega$

$\Rightarrow |W_2 T| < 1, \forall \omega$

T は小さい方がよい

トレードオフ

補間条件 $S + T = 1$

35

ロバスト性能

(不確かな) 感度関数

$\tilde{S} = \frac{1}{1+\tilde{P}K}, \tilde{P} = (1+\Delta W_2)P$

($\Delta = 0$ のとき $\tilde{P} = P, \tilde{S} = S$; ノミナル性能)

不確かさがある場合でも、(安定性だけでなく)性能も保持されるのか?

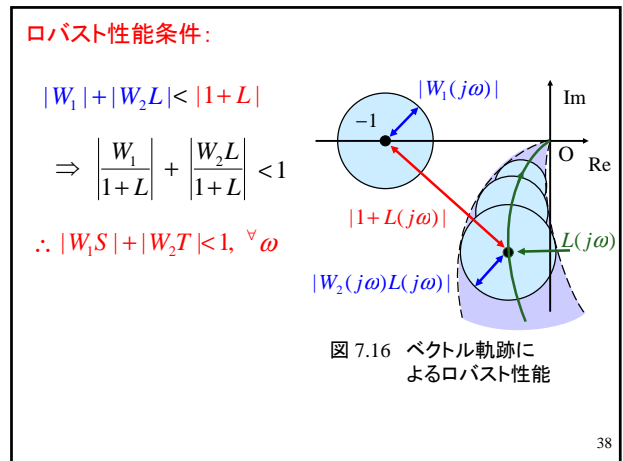
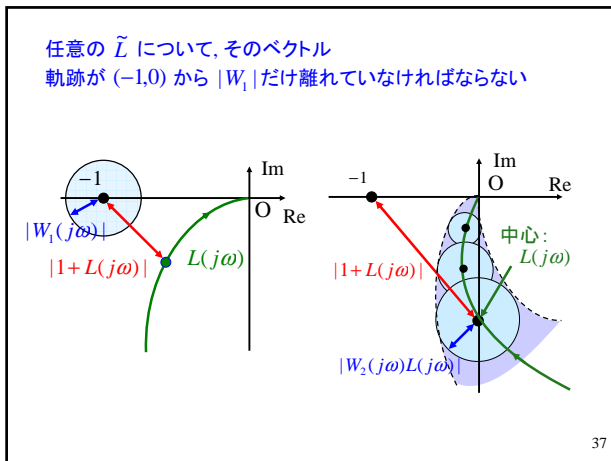
ロバスト性能とは

(i) ロバスト安定

(ii) $|W_1 \tilde{S}| < 1, \forall \omega, \forall \tilde{P} \in \mathcal{P}$

36

フィードバック制御入門 第7章



フィードバック制御系のロバスト性解析

ノミナル安定 (NS): $\phi = D_p D_K + N_p N_K = 0$ が安定
 (S, T, KS, PS が安定)

ノミナル性能 (NP): $|W_1S| < 1, \forall \omega$

ロバスト安定 (RS): $|W_2T| < 1, \forall \omega$

ロバスト性能 (RP): $|W_1S| + |W_2T| < 1, \forall \omega$

補間条件: $S + T = 1, \forall \omega$

39