

フィードバック制御入門 第6章

第6章 : フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック系の内部安定性

キーワード: 内部安定性, 特性多項式

学習目標: 最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する. フィードバック制御系の内部安定性について理解する.

1

第6章 : フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード: ナイキストの安定判別法

学習目標: ナイキストの安定判別法を理解し, フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる.

2

第6章 : フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード: 単純化されたナイキストの安定判別法

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

キーワード: 位相交差周波数, ゲイン交差周波数, 位相余裕, ゲイン余裕

学習目標: 単純化されたナイキストの安定判別法について理解する. 安定性の程度を評価するゲイン余裕や位相余裕について理解する.

3

6.1 フィードバック系の内部安定性

$P(s)$: 厳密にプロパー ($P(\infty) = 0$)
分母の次数が分子の次数より大きい

$K(s)$: プロパー ($|K(\infty)| < \infty$)

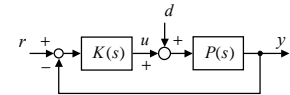


図 6.1 フィードバック制御系

[例 6.1] 不安定な極零相殺

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$$

$$P(s)K(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s} = \frac{1}{s}$$

$$d=0 \text{ のとき}$$

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \cdot r(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} \cdot r(s) = \frac{1}{s+1} \cdot r(s) \quad \text{安定?}$$

4

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow (s-1)y(s) = u(s)$$

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

初期値 y_0 を考慮

$$(s y(s) - y_0) - y(s) = u(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{s-1} u(s) + \frac{1}{s-1} y_0$$

$$u(s) = K(s)(r(s) - y(s)), \quad K(s) = \frac{s-1}{s} \text{ より}$$

$$y(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s} (r(s) - y(s)) + \frac{1}{s-1} y_0$$

$$(s+1)y(s) = r(s) + \frac{s}{s-1} y_0$$

$$y(s) = \frac{1}{s+1} r(s) + \frac{s}{(s+1)(s-1)} y_0$$

不安定

5

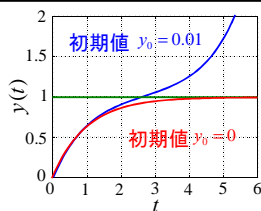


図 6.2 ステップ応答例

内部安定性

外部から加わる信号 $\{r(s), d(s)\}$ から各要素の出力 $\{u(s), y(s)\}$ への 4 つの伝達関数がすべて安定

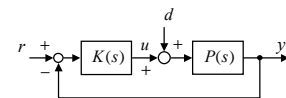
G_{yr} だけでは不十分

$$G_{ur}(s) = \frac{K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{ud}(s) = \frac{-P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}$$



6

フィードバック制御入門 第6章

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$G_{ur} = \frac{D_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}, \quad G_{ud} = \frac{-N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{yr} = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}, \quad G_{yd} = \frac{N_P(s)D_K(s)}{\phi(s)}$$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

特性多項式

[定理] (内部安定性の必要十分条件)

特性多項式

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) = 0$$

のすべての根の実部が負

7

[例 6.1]

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$\phi(s) = (s-1) \cdot s + 1 \cdot (s-1) = (s-1)(s+1) = 0$$

不安定

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)}$$

不安定な極零相殺が生じている

8

[結果 1]

$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在するとき、フィードバック制御系は内部安定ではない。

[結果 2]

$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在しないとき、以下の三つは等価である

- フィードバック制御系が内部安定
- $G_{yr}(s)$ が安定 $\left[G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \right]$
- $1+P(s)K(s)$ の零点がすべて安定

9

Well-posed (ウェルポーズド)

図 6.1 フィードバック制御系

$$P(s) = \frac{s}{s+1}, \quad K(s) = -1$$

$$G_{ur}(s) = -s-1, \quad G_{ud}(s) = -G_{yr}(s) = G_{yd}(s) = s$$

プロパーではない

Well-posed

$G_{ur}(s), G_{ud}(s), G_{yr}(s), G_{yd}(s)$ がすべて適切に定義され、かつプロパーになるとき、フィードバック系は well-posed であるといわれる。

↓

必要十分条件

$$1 + P(\infty)K(\infty) \neq 0$$

10

6.2 ナイキストの安定判別法

フィードバック系の内部安定性

⇔ 特性多項式 $\phi(s) = 0$ の根を求める

↓

因数分解などにより、直接計算する 実際のでない

ラウス=フルビッツの安定判別法を適用する 高次系では手間がかかる

開ループ伝達関数の周波数応答に基づき図的に判別する

11

ナイキストの安定判別法

[1] 目的

$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: 開ループ系 $P(s)K(s)$ の極

$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$: 閉ループ系 (制御系) の極

$$1 + P(s)K(s) = 1 + \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_K(s)}{D_K(s)} = \frac{D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}{D_P(s)D_K(s)}$$

還送差

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{(\text{閉ループ系の極})}{(\text{開ループ系の極})}$$

$\Pi = (\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ の中で) 開ループ系の不安定極の数 知っている

$Z = (\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ の中で) 閉ループ系の不安定極の数 知りたい

12

フィードバック制御入門 第6章

[2] 方法

閉曲線 C (このなかですべての不安定な極がある)

Π = 閉曲線 C の内部にある開ループ系の極の数

Z = 閉曲線 C の内部にある閉ループ系の極の数

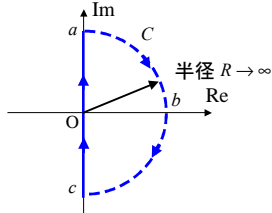


図 6.3(a) 右半平面全体を囲む閉曲線 C

13

写像 $w = 1 + P(s)K(s)$

複素数 s を決めると、対応する複素数 w が定まる。

s : (閉曲線 C に沿って)

$O \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow O$ と時計方向に 1 回転

このとき、対応する w が描く軌跡: Γ_1

$N = \Gamma_1$ が原点を時計方向にまわる回転数

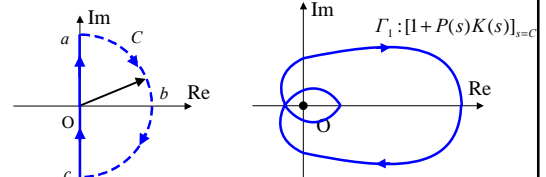


図 6.3 閉曲線 C とその $1 + P(s)K(s)$ による像 Γ_1

14

$$Z = N + \Pi$$

Π : 閉曲線 C の内部にある開ループ系の極の数

Π : 既知

Z : 閉曲線 C の内部にある閉ループ系の極の数

N : 図的に調べる

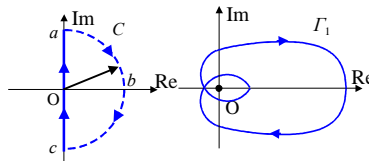
N : Γ_1 が原点を時計方向にまわる回転数



Z : 知ることができる

$Z = 0$ ならば安定

$Z \neq 0$ ならば不安定



15

[3] 証明

$$w = 1 + P(s)K(s) = \frac{(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$\angle w = \sum_{i=1}^n \angle(s-r_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i)$$

ベクトル \vec{a}_i r_i が C の内部にあるとき: 正味 1 回転 (-360°)

r_i が C の外部にあるとき: 正味の回転数は 0

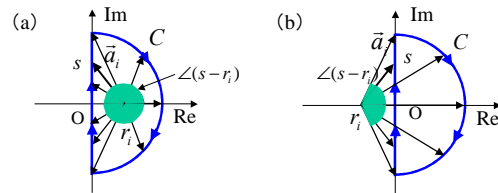


図 6.4 $(s-r_i)$ の偏角の変化

16

$$\angle w = \sum_{i=1}^n \angle(s-r_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \angle(s-r_i) \text{ の総変化量 } = -360^\circ \times Z$$

$$\sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) \text{ の総変化量 } = -360^\circ \times \Pi$$

$$\angle w \text{ の総変化量 } = -360^\circ \times (Z - \Pi)$$

$$\therefore N = Z - \Pi$$

$$\text{よって } Z = N + \Pi$$

17

[4] ベクトル軌跡の利用

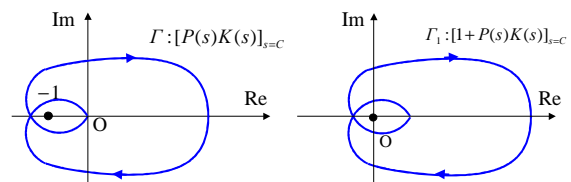
$$v = P(s)K(s) \xrightarrow{\text{右に 1 だけ移動}} w = 1 + P(s)K(s)$$

Γ : ナイキスト軌跡

Γ_1

Γ が点 $(-1, 0)$ を N 回まわる

Γ_1 が原点を N 回まわる



18

フィードバック制御入門 第6章

s :
 • C 上を $O \rightarrow a$ と動くとき、ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ ($\omega=0 \sim +\infty$) に一致する
 • 半径 ∞ の円周上を動くとき $P(\infty)K(\infty)=0$
 • C 上を $c \rightarrow O$ と動くとき、ベクトル軌跡と実軸に関して対称

19

ナイキストの安定判別法

[ステップ 1] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を、角周波数 $\omega=0 \sim +\infty$ の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1,0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。

[ステップ 3] 開ループ伝達関数 $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

[ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。したがって、 $Z=0$ ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

20

安定 $\Leftrightarrow Z=0 \Leftrightarrow -N = \Pi$

ナイキスト軌跡が点 $(-1,0)$ のまわりを反時計方向にまわる回数が、開ループ伝達関数の不安定極の個数に等しいならば、制御系は安定である。

ナイキストの安定判別法の利点

- ループを閉じる前の開ループ伝達関数の周波数応答によって、図的に制御系(閉ループ系)の安定性を判別できる
- 計算の必要がなく、次数の高い系やむだ時間系にも容易に適用できる
- 実測データに基づいて判定できる
- 直感的に分かりやすく、さらに安定余裕も調べられる

21

[例 6.2]

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

[ステップ 1]

[ステップ 2] $N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 0$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = 0$ **制御系は安定**

22

[例 6.3] (不安定系の場合)

$$L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K=2, \frac{3}{4}$$

[ステップ 1]

(a) $K=2$

(b) $K=3/4$

[ステップ 2] $N = -1$ $N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 1$ $\Pi = 1$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$ $Z = N + \Pi = 0 + 1 = 1 \neq 0$

安定 **不安定**

23

[例 6.4] (虚軸上に極がある場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

[ステップ 1] 閉曲線 C に対するナイキスト軌跡
 $\Rightarrow \omega=0$ の近傍で不連続、 N を求められない

24

フィードバック制御入門 第6章

$s=0$ を回避し、左に見るように経路 $d \rightarrow e \rightarrow f$
 (新たな閉曲線 C 内に $s=0$ の極は入らない)

経路 $d \rightarrow e \rightarrow f$ $s = \epsilon e^{j\theta}$ ($\epsilon \rightarrow 0, -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(\epsilon e^{j\theta}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon e^{j\theta} (\epsilon e^{j\theta} + 1)(\epsilon e^{j\theta} + 2)}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{2\epsilon} e^{-j\theta}$$

半径 ∞ の円周 +90°から -90°へ
時計方向に

25

[ステップ 2] $N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 0$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = 0$ 制御系は安定

26

ナイキストの安定判別法 [復習]

[ステップ 1] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を、角周波数 $\omega = 0 \sim +\infty$ の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1,0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。

[ステップ 3] 開ループ伝達関数 $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

[ステップ 4] 開ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

27

開ループ伝達関数が安定な場合

$\Pi = 0$ より
 $Z = 0$ となるためには $N = 0$ でなければならない
 $\therefore Z = N + \Pi$

単純化されたナイキストの安定判別法

[ステップ 1] 開ループ伝達関数の極の中に、その実部が正となるものがないことを確認する。

[ステップ 2] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を角周波数 $\omega = 0 \sim +\infty$ の範囲で描く。

[ステップ 3] ω を 0 から ∞ へ変化させたとき、この開ループ伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ をつねに左に見るように動くならば、系は安定である。また、右に見れば系は不安定となる。

28

[例 6.5] (安定系の場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad K = 3, 6, 12$$

$K=3$ のとき
 点 $(-1,0)$ を常に左に見る
 ⇒ 安定

$K=6$ のとき
 ちょうど点 $(-1,0)$ を通過する
 ⇒ 安定限界

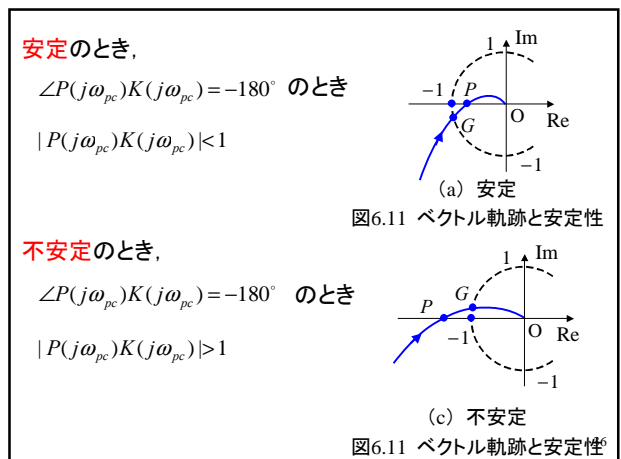
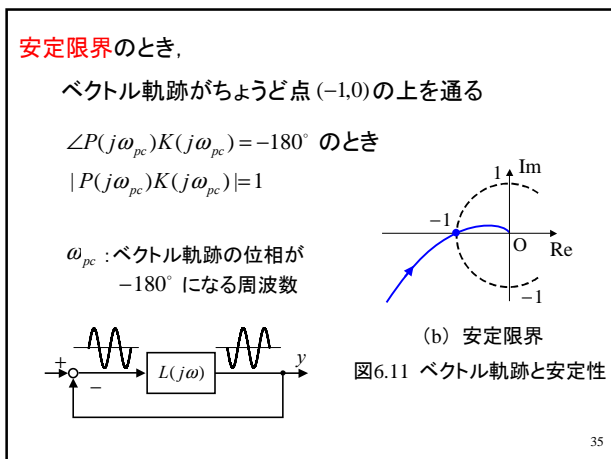
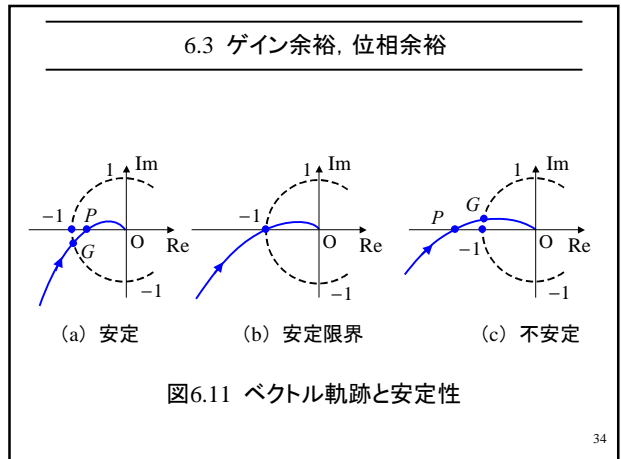
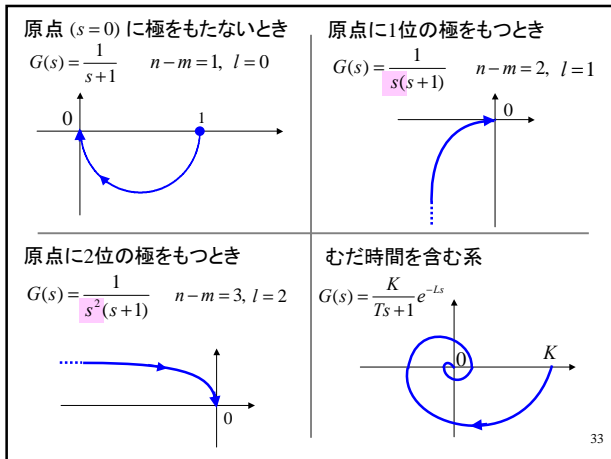
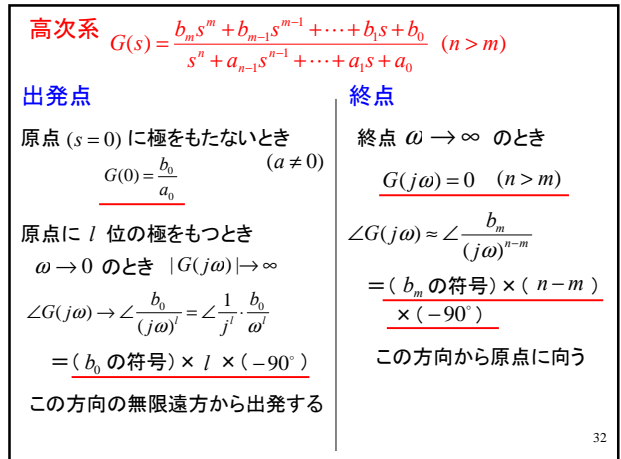
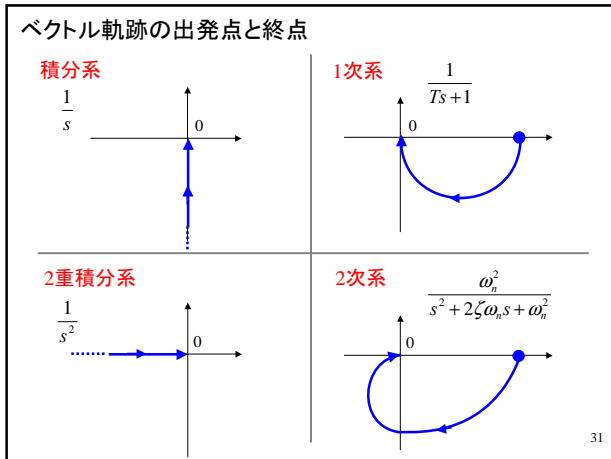
$K=12$ のとき
 点 $(-1,0)$ を右に見るようになる
 ⇒ 不安定

29

[例] 単純化されたナイキストの安定判別法

30

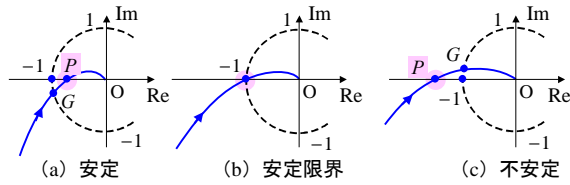
フィードバック制御入門 第6章



フィードバック制御入門 第6章

位相交差周波数 ω_{pc}

ベクトル軌跡が負の実軸を横切る点 P に対応
位相が -180° になる

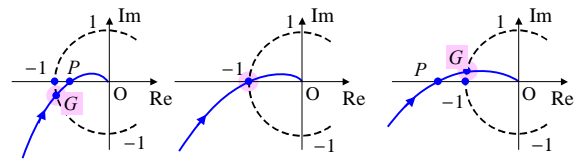


37

ゲイン交差周波数 ω_{gc}

ゲインがちょうど 1 になる点 G に対応
単位円を横切る

- $\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) > -180^\circ$ 安定
- $\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) = -180^\circ$ 安定限界
- $\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) < -180^\circ$ 不安定



(a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定 38

ベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ からある程度離れているならば、**安定余裕**がある。

ゲイン余裕 GM

あとどれだけゲインを増やすと制御系が不安定になるか。

$$GM = \frac{1}{OP} \quad (\text{dB})$$

位相余裕 PM

あとどれだけ位相が遅れると制御系が不安定になるか。

$$PM = \angle GOP \quad (^\circ)$$

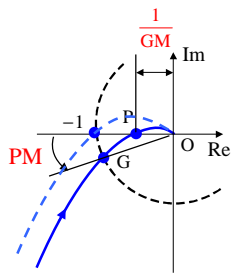
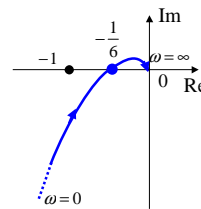


図 ゲイン余裕, 位相余裕

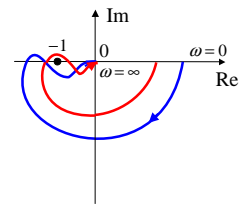
39

[例]ゲイン余裕

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



安定
GM = 6



安定(条件付安定)
GM = ∞

40