第 4 章 :フィードバック制御系の特性

4.1　感度特性

キーワード：　感度，感度関数

4.2　定常特性

キーワード：　開ループ伝達関数（一巡伝達関数）　定常偏差

学習目標：フィードバック制御系における感度関数について理解する．定常偏差について理解する．

1

第 4 章 :フィードバック制御系の特性

4.2　定常特性

キーワード：　定常偏差，偏差定数，l 型の制御系

4.3　根軌跡

キーワード：　特性方程式，特性根，根軌跡

学習目標：定常偏差や偏差定数について理解して，フィードバック制御系の型について理解する．根軌跡の基礎について理解する．

2

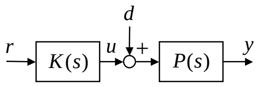
4.1　感度特性

パラメータの変化に対する感度

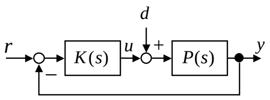
フィードバック　vs　フィードフォワード

外乱なし($d=0$)

制御対象（1 次系）　$P(s)=\dfrac{A}{\tau s+1}$　　コントローラ（ゲイン）　$K(s)=K$



(a) フィードフォワード制御系



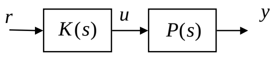
(b) フィードバック制御系

図 4.1　フィードフォワード制御系とフィードバック制御系

3

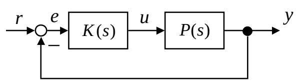
$r \to y$　への伝達関数

フィードフォワード



$$y(s)=P(s)K(s)r(s)=\frac{A}{\tau s+1}\cdot K\cdot r(s)=\underline{\frac{AK}{\tau s+1}r(s)}$$

フィードバック



$$\begin{cases} y(s)=P(s)K(s)e(s) \\ e(s)=r(s)-y(s) \end{cases}$$

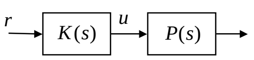
$$\left(1+P(s)K(s)\right)y(s)=P(s)K(s)r(s)$$

$$y(s)=\frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}r(s)=\underline{\frac{AK}{\tau s+1+AK}r(s)}$$

（閉ループ伝達関数）

4

フィードフォワード



ゲイン $K=\frac{1}{A}$ とすると

$$y(s)=\frac{AK}{\tau s+1}r(s)=\frac{1}{\tau s+1}r(s)$$

$y(t)\approx r(t)$　　$(t\to\infty)$

$\tilde{A}=1.4A$（特性変動）

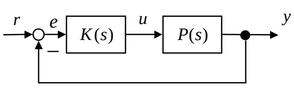
40 % 変化

$$\tilde{y}(s)=\frac{\tilde{A}K}{\tau s+1}r(s)=\frac{1.4}{\tau s+1}r(s)$$

$\tilde{y}(t)\approx 1.4r(t)$

$(1.4y(t))$

フィードバック



$$y(s)=\frac{AK}{\tau s+1+AK}r(s)$$

ゲイン $K\to\infty$ とすると

$$\frac{AK}{\tau s+1+AK}\approx\frac{AK}{AK}=1$$

（A や τ に関係ない）

$\therefore$　$y(t)\approx r(t)$

特性変動による影響の抑制

5

[例 4.1]

$P(s)=\dfrac{A}{\tau s+1}$,　$K(s)=K$

$\tau=1$,　$A=5$

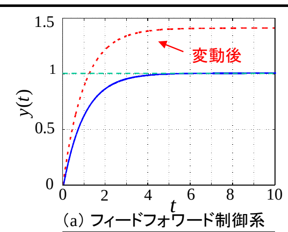
とすると　$P(s)=\dfrac{5}{s+1}$

特性変化　$A\to\tilde{A}=7$

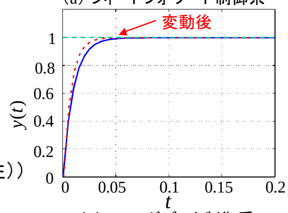
フィードフォワード：$K=\dfrac{1}{A}=0.2$

フィードバック：$K=20$

（ $t=0.05$で収束，安定化（速応性））



(a) フィードフォワード制御系



(b) フィードバック制御系

6

感度

制御対象: $P(s) \to \tilde{P}(s)$ と変化

$r \to y$ への閉ループ伝達関数 $T(s) = \dfrac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \to \tilde{T}(s)$ へと変化

相対的な変動率

$$\Delta_P(s) = \frac{P(s)-\tilde{P}(s)}{\tilde{P}(s)} \qquad \Delta_T(s) = \frac{T(s)-\tilde{T}(s)}{\tilde{T}(s)}$$

$$\Delta_T(s) = \frac{\dfrac{PK}{1+PK} - \dfrac{\tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}}{\dfrac{\tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}} = \frac{PK(1+\tilde{P}K)-\tilde{P}K(1+PK)}{\tilde{P}K(1+PK)}$$

$$\Delta_P(s)$$

$$= \frac{(P-\tilde{P})\cancel{K}}{\tilde{P}\cancel{K}(1+PK)} = \frac{1}{1+P(s)K(s)}\Delta_P(s)$$

7

$$\Delta_T(s) = \frac{1}{1+P(s)K(s)}\Delta_P(s)$$

閉ループ系の変動が $\dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$ 倍になって

閉ループ系に影響する

$K(s)$ のゲイン大 $\longrightarrow$ 低感度

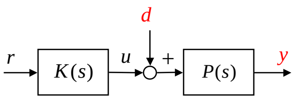
感度関数 $S(s) = \dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$

8

外乱に対する感度（目標値 $r=0$）

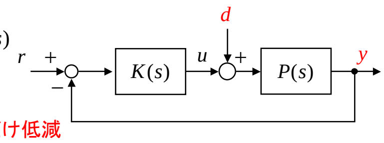
フィードフォワード

$y(s) = P(s)d(s)$



フィードバック

$$y(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$



$S(s) = \dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$ だけ低減

外乱の影響の抑制

9

4.2 定常特性

目標値に対する定常偏差（外乱 $d=0$）

[例 4.2]

制御対象: $P(s) = \dfrac{1}{s+1}$

コントローラ: $K(s) = K$

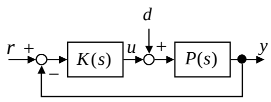


図4.1 (b) フィードバック制御系

$r \to y$ への閉ループ系の伝達関数

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{\dfrac{K}{s+1}}{1+\dfrac{K}{s+1}} = \frac{K}{s+K+1}$$

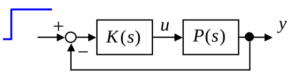
10

$y(s) = T(s)r(s)$ $\left(T(s) = \dfrac{K}{s+K+1} \quad r(s) = \dfrac{1}{s} \text{（ステップ応答）} \right)$

$$y(s) = \frac{K}{1+K}\cdot\frac{K+1}{s+(K+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$= \frac{K}{1+K}\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(K+1)}\right)$$

$$y(t) = \frac{K}{1+K}\left(1-e^{-(K+1)t}\right)$$



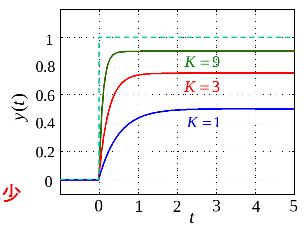
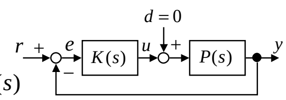


図4.3 ステップ応答例

ゲイン:大 ➡ （定常）偏差:減少

11

偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$



一巡伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$
（開ループ伝達関数）

$e(s) = r(s) - y(s)$

$y(s) = L(s)e(s)$

➡

$e(s) = r(s) - L(s)e(s)$

$(1+L(s))e(s) = r(s)$

$$e(s) = \frac{1}{1+L(s)}r(s)$$

（感度関数）

定常偏差

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\cdot e(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}r(s)$$

最終値定理(p. 190 付録(L7))

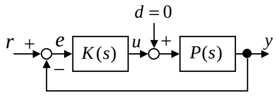
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

12

定常偏差（復習）

偏差　$e(t)=r(t)-y(t)$



一巡伝達関数　$L(s)=P(s)K(s)$
（開ループ伝達関数）

$$e(s)=r(s)-y(s)$$
$$y(s)=L(s)e(s)$$

➡

$$e(s)=r(s)-L(s)e(s)$$
$$(1+L(s))e(s)=r(s)$$
$$e(s)=\frac{1}{1+L(s)}r(s)$$

（感度関数）

定常偏差

$$e_s=\lim_{t\to\infty}e(t)$$
$$=\lim_{s\to 0}s\cdot e(s)$$
$$=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L(s)}r(s)$$

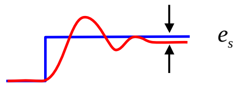
最終値定理(p. 190 付録(L7))

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$
$$F(s):=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

13

[A] ステップ入力

$r(t)=1$　$\left(r(s)=\frac{1}{s}\right)$

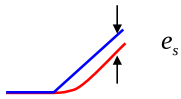


$$e_s=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}$$　定常位置偏差

$$K_p=\lim_{s\to 0}L(s)=L(0)$$　位置偏差定数

[B] ランプ入力

$r(t)=t$　$\left(r(s)=\frac{1}{s^2}\right)$



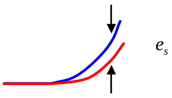
$$e_s=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)}$$　定常速度偏差

$$K_v=\lim_{s\to 0}sL(s)$$　速度偏差定数

14

[C] 一定加速度入力

$r(t)=\frac{1}{2}t^2$　$\left(r(s)=\frac{1}{s^3}\right)$



$$e_s=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2L(s)}$$　定常加速度偏差

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2L(s)$$　加速度偏差定数

偏差定数

$K_p(=L(0))$, K_v, K_a :大　➡　定常偏差:小

15

(一般に)一巡伝達関数　$L(s)=\dfrac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{s^l(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0)}$

$l=1$ のとき:

$L(s)$ は積分器 $\left(\frac{1}{s}\right)$ を 1 個含む

$K_p=L(0)=\infty$　$\Rightarrow$　$\frac{1}{1+K_p}=0$

$l=2$ のとき:

$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot L(s)=\infty$　$\Rightarrow$　$\frac{1}{K_v}=0$

$l=3$ のとき:

$K_a=\lim_{s\to 0}s^2\cdot L(s)=\infty$　$\Rightarrow$　$\frac{1}{K_a}=0$

表4.1　制御系の型と定常偏差

制御系の型	$r(t)=1$	$r(t)=t$	$r(t)=\frac{t^2}{2}$
0 型	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1 型	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2 型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

定常偏差をゼロにするためには

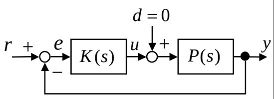
l 型（タイプ l ）の制御系: $L(s)$ が l 個の積分器 $\left(\frac{1}{s}\right)^l$ をもつ

$\Rightarrow$（係数の値に関係なく）常に, 定常偏差 = 0

16

[例 4.3]

$$P(s)=\frac{1}{s},\quad K(s)=\frac{K_0}{s+1}\ (K_0>0)$$



$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$

位置偏差定数

$$K_p=L(0)=\infty$$

定常位置偏差

$$e_s=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}=\frac{1}{1+L(0)}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

（ K_0 の値に関係なく）

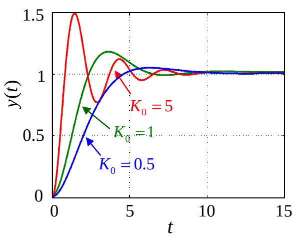
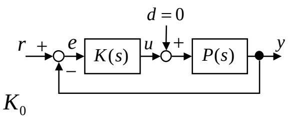


図4.4（a）ステップ応答

17

$$L(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$



速度偏差定数

$$K_v=\lim_{s\to 0}sL(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\frac{K_0}{\cancel{s}(s+1)}=K_0$$

定常速度偏差

$$e_s=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)}=\frac{1}{K_0}$$

加速度偏差定数

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2L(s)$$
$$=\lim_{s\to 0}s^2\cdot\frac{K_0}{s(s+1)}=0$$

定常加速度偏差

$$e_s=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2L(s)}=\infty$$

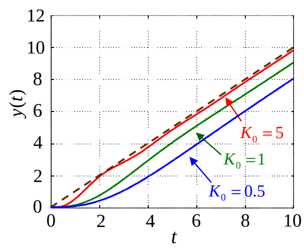
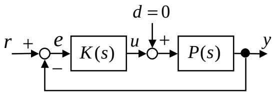


図4.4（b）ランプ入力応答

18

[例 4.3]（再考）

$$P(s)=\frac{1}{s},\ K(s)=\frac{K_0}{s+1}\ (K_0>0)$$



$$r(s)=\frac{1}{s}$$

$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$ 1 型

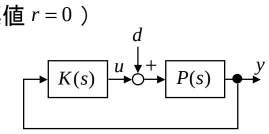
K_0 の値に関係なく定常位置偏差＝0

$$L(0)=\infty \quad \left(\Leftrightarrow S(0)=\frac{1}{1+L(0)}=0\right)$$

目標値の周波数成分 ($\omega=0$)に対して，ループゲインが無限大

外乱に対する定常偏差（目標値 $r=0$ ）

$$y(s)=\frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$



ステップ外乱 $d(s)=\frac{1}{s}$

定常偏差 $\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sy(s)=\frac{P(0)}{1+P(0)K(0)}$

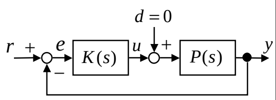
$K(0)=\infty$ または $P(0)=0$ ならば，定常偏差＝0

（実質的には）コントローラが積分器をもつことが重要

外乱の周波数成分（ $\omega=0$ ）に対して，コントローラのゲインが無限大

[例 4.3]（復習）

$$P(s)=\frac{1}{s},\quad K(s)=\frac{K_0}{s+1}(K_0>0)$$



$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$ 1 型

位置偏差定数

$$K_p=L(0)=\infty$$

定常位置偏差

$$e_s=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}=\frac{1}{1+L(0)}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

（ K_0 の値に関係なく）

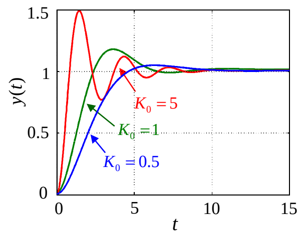
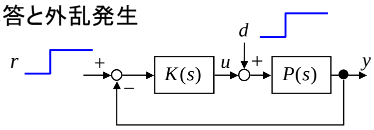
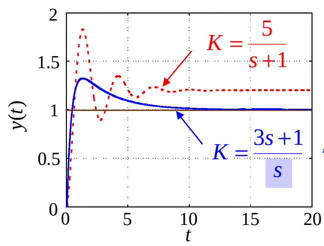


図4.4 (a) ステップ応答

[例 4.4] 目標値応答と外乱発生

$$P(s)=\frac{1}{s},\quad d(s)=\frac{1}{s}$$





ステップ外乱が同時に加わると定常偏差

制御器に積分器

図4.5 ステップ外乱が存在するときの目標値応答

4.3 根軌跡

K ：定数ゲイン（パラメータ）

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

閉ループ系の伝達関数

$$\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{K\dfrac{N(s)}{D(S)}}{1+K\dfrac{N(s)}{D(s)}}=\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$$

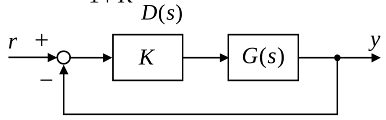
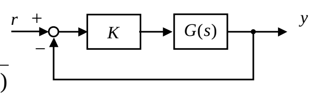


図 4.6 直結フィードバック制御系

閉ループ系の伝達関数

$$\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$$



閉ループ系の極

特性方程式

$$1+KG(s)=0 \quad \text{あるいは} \quad D(s)+KN(s)=0$$

特性根

根軌跡

K を $0\to\infty$ と変化させたとき，特性根の位置を順次プロットしたもの

[例 4.5]

$G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$ $\left(G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}\right)$

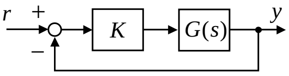


図 4.6 直結フィードバック制御系

$D(s)+KN(s)=s(s+2)+K\cdot 1$

$=s^2+2s+K=0$

×：極　○：零点　矢印 ： K が増大する方向

$K=0$　$s=0,-2$　（2 実根）

$0<K<1$　$s=-1\pm\sqrt{1-K}$　（2 実根）

$K=1$　$s=-1$　（重根）

$K>1$　$s=-1\pm\sqrt{K-1}\,j$　（複素共役根）

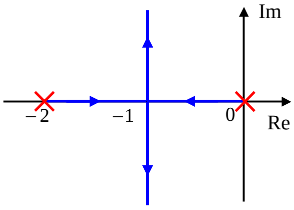


図 4.7 2 次系の根軌跡

25

根軌跡の性質

[性質1]

根軌跡は $G(s)$ の極 p_i $(i=1\sim n)$ から出発し，その中で m 本の軌跡の終点は $G(s)$ の零点 z_i $(i=1\sim n)$ であり，残りの $n-m$ 本の軌跡は無限遠点に発散していく．

[性質1]について

根軌跡（の一部）は，$G(s)$ の零点 $z_i(i=1\sim m)$ へ向かう

$1+KG(s)=0$ より $G(s)=-\dfrac{1}{K}\to 0$ $(K\to\infty)$

26

根軌跡の性質

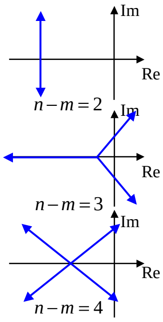
[性質2]

無限遠点に至る根軌跡の漸近線の角度は

$\dfrac{180^\circ+360^\circ l}{n-m}$　l：任意定数

また，$n-m\geq 2$ のとき漸近線と実軸は交点を1つ持ち，その座標は

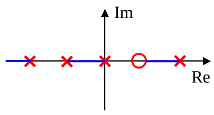
$\dfrac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$



27

[性質3]

実軸上の点で，その右側に $G(s)$ の実極と実零点が（重複度を含め）合計奇数個あれば，その点は根軌跡上の点である．



[性質4]

根軌跡が実軸から分岐（または合流）する点は，

$\dfrac{d}{ds}\dfrac{1}{G(s)}=0$

を満たす．

[性質5]

複素極 から根軌跡が出発する角度は

$180^\circ-\sum_{i\neq j}\angle(p_j-p_i)+\sum_{i=1}^{m}\angle(p_j-z_i)$

であり，複素零点 へ根軌跡が終端する角度は

$180^\circ+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_j-p_i)-\sum_{i\neq j}\angle(z_j-z_i)$

28

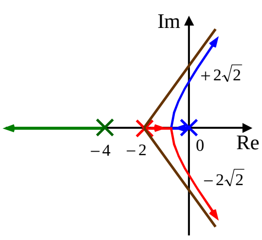


図 4.10 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ のときの根軌跡

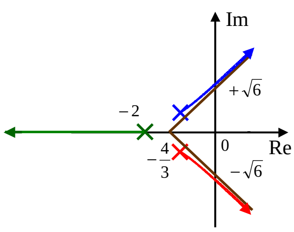


図 4.11 $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$ のときの根軌跡

29