

フィードバック制御入門 第3章

第3章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.1 インパルス応答とステップ応答
キーワード：インパルス応答, ステップ応答

3.2 1次系の応答
キーワード：1次系の応答

学習目標：インパルス応答とステップ応答について理解する。また、1次系の過渡応答特性を理解する。

1

第3章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2次系の応答
キーワード：2次系の応答

3.4 極・零点と過渡応答
キーワード：過渡応答, 極, 零点

学習目標：2次系の過渡応答特性について理解する。また、極・零点と過渡応答の関係についても理解する。

2

第3章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性
キーワード：安定性, ラウスの安定判別法, フルビッツの安定判別法

学習目標：システムの安定性の概念を理解する。また、システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するラウスの安定判別法、フルビッツの安定判別法を習得する。

3

3. ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.1 インパルス応答とステップ応答

システム (伝達関数表現)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (n \geq m)$$

極 (pole)： $D(s) = 0$ の根

零点 (zero)： $N(s) = 0$ の根

プロパー (proper)： $n \geq m$

真に (厳密に) プロパー (strictly proper)： $n > m$

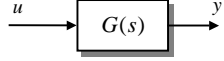


図 3.1 線形ダイナミカルシステム

4

代表的な入力信号

単位インパルス関数 (デルタ関数)

デルタ関数のラプラス変換
 $L[\delta(t)] = 1$

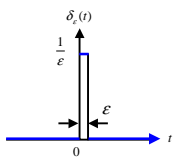


図 3.2 (a) インパルス関数

単位ステップ関数

ステップ関数のラプラス変換
 $L[u_s(t)] = \frac{1}{s}$

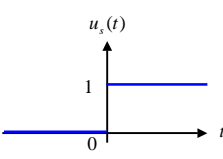


図 3.2 (b) ステップ関数

5

応答 (出力)

$$y(s) = G(s)u(s) \Rightarrow \underline{y(t)} = L^{-1}[G(s)u(s)]$$

インパルス応答 $u(s) = 1$

$$y(t) = L^{-1}[G(s) \cdot 1] = L^{-1}[G(s)] = g(t)$$

インパルス応答は、伝達関数を逆ラプラス変換したもの

↓

$L[g(t)] = G(s)$

伝達関数は、インパルス応答をラプラス変換したもの

ステップ応答 (インディシャル応答)

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[G(s) \frac{1}{s}\right]$$

ステップ応答は、インパルス応答を時間積分したもの

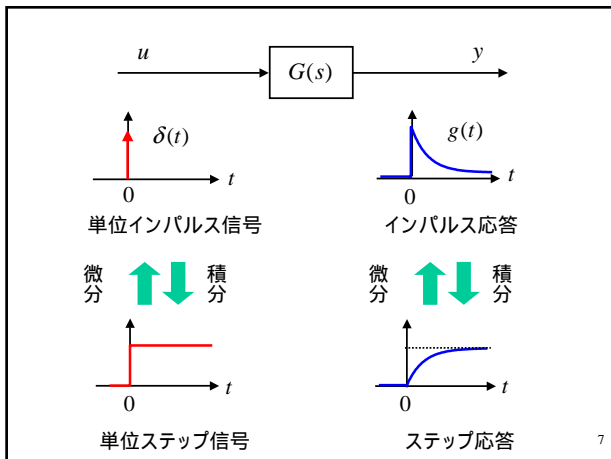
↑

$$L\left[\int_0^t g(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} G(s) \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^t g(\tau) d\tau = L^{-1}\left[\frac{1}{s} G(s)\right]$$

6

フィードバック制御入門 第3章



ラプラス変換の性質

- 合成積(コンボリューション)

$$F(s)G(s) = \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right] \quad (A.17)$$
- コンボリューション(たたみ込み積分)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)u(s)] = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad g(t) : \text{重み関数}$$

ダイナミカル

ステップ応答の利点

- 単純にステップ入力を加えればよいので実験的に応答を得やすい。
- ステップ応答から制御対象をモデル化することができる。
- 実際の制御系において、目標値がステップ状に変化する場合が多く、これに対する応答でシステムの良否を判断することが一般的である。

3.2 1次系の応答

1次系 $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$

インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K/T}{s+(1/T)}\right] = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

図3.3 インパルス応答(1次系)

ラプラス変換の基本公式

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s+a}\right] = be^{-at}$$

ステップ応答

インパルス応答の積分だから

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T}e^{-\tau/T}d\tau = \frac{K}{T}[-Te^{-\tau/T}]_0^t = K(1-e^{-t/T})$$

定常値

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(1-e^{-t/T}) = K$$

初期速度

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{K}{T}e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

図3.3 ステップ応答(1次系)¹¹

- 時刻 $t=T$ において定常値の 63.2% になる。

$$y(t) = K(1-e^{-t/T}) = K(1-e^{-1}) = K(1-0.368) = 0.632 \cdot K$$
- 初期速度のまま進めば、 T 秒後に定常値に到達する。

定常値 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s) \frac{1}{s}] = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

直流ゲイン(DC gain)

最終値定理

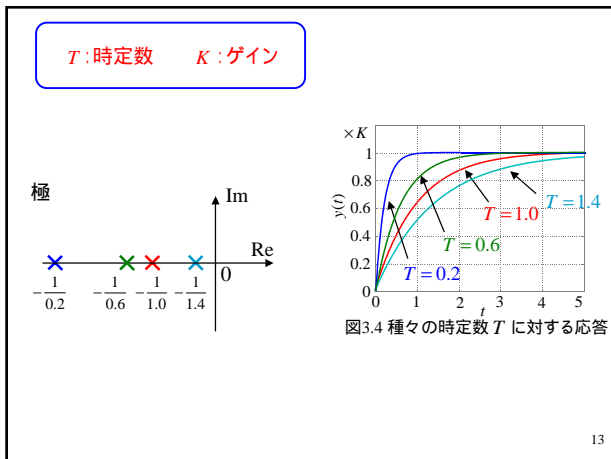
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (A.16)$$

- 定常値は入力の大さきの K 倍になる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{K}{T \cdot 0 + 1} = K$$

T : 時定数
K : ゲイン

フィードバック制御入門 第3章



[例 3.1] 回転運動系

入力 $u(t) = \tau(t)$
出力 $y(t) = \omega(t)$

ラプラス変換

$$Js\omega(s) + B\omega(s) = \tau(s)$$

$$(Js + B)\omega(s) = \tau(s)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{Js + B}\tau(s)$$

$$= \frac{(1/B)}{(J/B)s + 1}\tau(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{\tau(s)} = \frac{(1/B)}{(J/B)s + 1}$$

図 3.5 回転運動系

$\omega(t)$: 角速度
 J : 慣性モーメント
 B : 粘性摩擦係数
 $\tau(t)$: 入力トルク

$$G(s) = \frac{(1/B)}{(J/B)s + 1} \quad \left| \quad G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \right.$$

$J/B \longleftrightarrow T$
 $1/B \longleftrightarrow K$
 $J \rightarrow \text{大} \longleftrightarrow T \rightarrow \text{大}$

定常状態 $d\omega/dt = 0$
 $G(0) = \frac{1}{B} \longleftrightarrow G(0) = K$

Jに依存しない

3.3 2次系の応答

2次系(2次遅れ系)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \zeta, \omega_n, K : \text{正定数}$$

$(0 \leq \zeta < 1)$ のとき

極: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

極 (pole): $D(s) = 0$ の根

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\Rightarrow -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} \pm \underbrace{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

図 3.8 2次系の極の位置

複素共役根

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d$$

$$\omega_d := \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

図3.6 2次系のインパルス応答例

インパルス応答

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}\right]$$

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

収束の速さ 振動の周波数

3.3 2次系の応答

2次系(2次遅れ系)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \zeta, \omega_n, K : \text{正定数}$$

$(0 \leq \zeta < 1)$ のとき

極: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

極 (pole): $D(s) = 0$ の根

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\Rightarrow -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} \pm \underbrace{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

図 3.8 2次系の極の位置

フィードバック制御入門 第3章

複素共役根
 $p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d$
 $p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d$
 $\omega_d := \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

インパルス応答
 $y(t) = L^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$
 $= L^{-1}\left[\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}\right]$
 $y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$
 収束の速さ 振動の周波数

図3.6 2次系のインパルス応答例

ステップ応答

$y(t) = L^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right]$
 部分分数展開
 $= L^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$
 $= L^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{K\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right]$
 $= K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t)\right)\right\}$
 $= K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)\right\} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$L^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at} \cos(\omega t)$
 $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi)$
 $\phi = \tan^{-1} \frac{a}{b}$

$\zeta = 1$ のとき 重根 $-\zeta\omega_n$
ステップ応答
 $y(t) = K\left\{1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\right\}$

$\zeta > 1$ のとき 2実根
ステップ応答
 $y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta} \left((\zeta + \beta)e^{\omega_n \beta t} - (\zeta - \beta)e^{-\omega_n \beta t}\right)\right\}$
 $\beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$

図3.7 2次系のステップ応答

$\zeta < 1$ 不足制動
 $\zeta = 1$ 臨界制動
 $\zeta > 1$ 過制動

図3.7 2次系のステップ応答 図3.8 2次系の極の位置

横軸 $\omega_n t$
 目盛り 10
 $\omega_n = 1 \quad t = 10$ —
 $\omega_n = 5 \quad t = 2$ - - -

ω_n : 大 → 応答が速くなる

ω_n は原点からの距離

2次系のステップ応答 2次系の極の位置

2次系(2次遅れ系)
 $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \zeta, \omega_n, K : \text{正定数}$

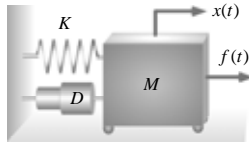
- ζ は振動減衰(ダンピング)の特性を定める; 減衰係数 ζ
- ω_n は速応性を定める; 自然角周波数(固有角周波数) ω_n
- K はゲイン $G(0) = K$ 定常値, DC ゲイン

フィードバック制御入門 第3章

[例 3.2] 質量-ばね-ダンパ系

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{(1/M)}{s^2 + (D_s/M)s + (K_s/M)}$$



- 自然角周波数 ω_n が K_s に比例
- 減衰係数 ζ が D_s に比例

25

3.4 極・零点と過渡応答

極とインパルス応答

伝達関数 $G(s)$ 実極 $-\sigma_i (i=1 \sim M)$
 複素共役極 $-\alpha_i \pm j\omega_i (i=1 \sim N)$

ステップ応答(ラプラス変換)

部分分数展開より

$$y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s + \sigma_i} + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{(s + \alpha_i)^2 + \omega_i^2}$$

ステップ応答

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$

ステップ入力に対応

26

極の実部の大きさ: 収束の速さ

極の虚部の大きさ: 振動成分の周期

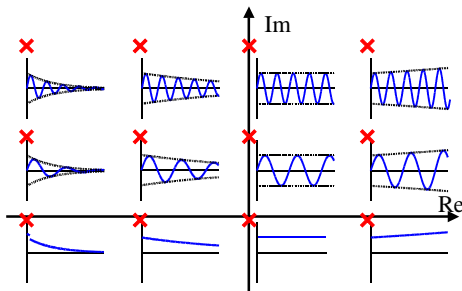


図 3.9 極の位置とインパルス応答

27

過渡応答に関する特性値

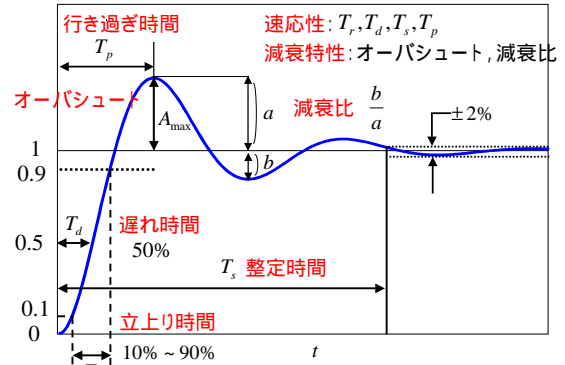


図 3.10 過渡応答と諸特性値

28

2次系の場合

$$y(t) = K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right\}$$



$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = K \left(1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

$$\text{オーバーシュート} = 100 \times e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} (\%)$$

ζ	オーバーシュート (%)
0.8	1.5
0.7	4.6
0.4	25.4

29

零点の影響

[例 3.4]

$$G(s) = \frac{as+1}{(s+1)(2s+1)}$$

極: $-1, -0.5$

零点: $-\frac{1}{a}$

$a < 0$: (不安定) \Rightarrow 逆ぶれ

a : 小 \Rightarrow 影響なし

a : 大 \Rightarrow オーバシュート

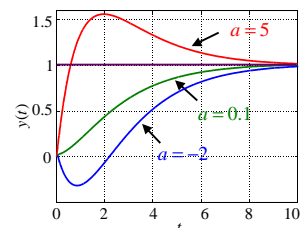
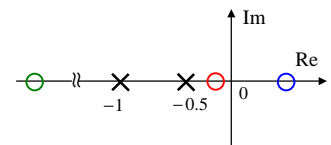


図 3.13 零点の影響

30

フィードバック制御入門 第3章

代表極

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$

$0 < \alpha_1 \ll \alpha_j \quad (j=2 \sim N)$ ✗
 $0 < \alpha_1 \ll \sigma_j \quad (j=1 \sim M)$ ✗

$e^{-\alpha_1 t}, e^{-\sigma_1 t}$ は急速に減少

➡ 最も遅いモードは $e^{-\alpha_1 t}$ が支配
代表極

$$y(t) \approx A_0 + \frac{B_1}{\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t$$

31

[例 3.3]

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

$\tau s + 1 = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{\tau}$
 $s^2 + 2s + 5 = 0 \rightarrow s = -1 \pm j2$

$\tau = 0.01 \quad -\frac{1}{\tau} = -100 \quad G \approx G_2$
 $\tau = 4 \quad -\frac{1}{\tau} = -0.25 \quad G \approx G_1$

図 3.7 3次系のブロック線図 図 3.12 3次系の応答例³²

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

安定性 (有界入力 有界出力安定 (BIBO 安定))

有界な大きさの任意の入力 ($|u(t)| < \infty$) に対して, その出力がやはり有界 ($|y(t)| < \infty$) であるとき, 安定という.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

安定でない = 不安定

図 3.1 線形ダイナミカルシステム 33

安定性: (実際には)
ステップ入力する応答が, 一定値に収束すること

[例]

$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$G_b(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1s + 1}$$

(a) 安定なシステムの応答 (b) 不安定なシステムの応答

図 3.14 ステップ応答例 34

(ステップ応答)

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$

$-\sigma_i < 0, -\alpha_i < 0$ ならば,

$e^{-\sigma_i t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ $e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$

そうでなければ, 発散(振動)する 35

安定性の必要十分条件

(条件A) すべての極の実部が負

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (a_n > 0)$$

$$= a_n \prod_{i=1}^M (s + \sigma_i) \prod_{i=1}^N (s^2 + 2\alpha_i s + (\alpha_i^2 + \omega_i^2))$$

(条件A) $\sigma_i > 0, \alpha_i > 0$

安定性の必要条件

(条件B) すべての係数 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 が正 36

フィードバック制御入門 第3章

安定性の必要条件

(条件B) すべての係数 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 が正

[例]

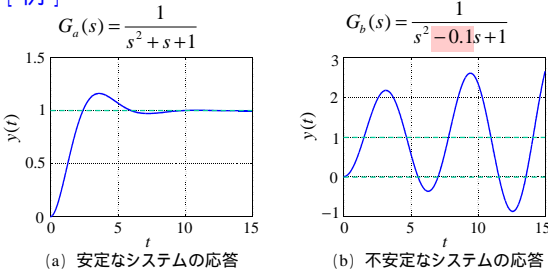


図 3.14 ステップ応答例

37

[例] (必要性)

$$D_1(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 \quad (\text{条件B: OK})$$

+1 +1 +3 +2 +6 +2

$$D_2(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1 \quad (\text{条件B: OK})$$

+1 +1 +6 +3 +4 +1

共に安定か?

$$D_1(s) = 0 \text{ の根}$$

$0.56 \pm 1.37j, -0.89 \pm 1.33j, -0.35$ 不安定

$$D_2(s) = 0 \text{ の根}$$

$-0.26 \pm 2.21j, -0.10 \pm 0.85j, -0.28$ 安定

38

ラウスの安定判別法

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

ラウス表

s^n	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	...	
s^{n-1}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	...	(存在しない項は 0)
s^{n-2}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	
s^{n-3}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
s^2	$R_{n-1,1}$	$R_{n-1,2}$	0			
s	$R_{n,1}$	0				
s^0	$R_{n+1,1}$	0				

39

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

ラウス表

s^n	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	...	$R_{31} = \frac{R_{21}R_{12} - R_{11}R_{22}}{R_{21}}$
s^{n-1}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	...	$R_{32} = \frac{R_{21}R_{13} - R_{11}R_{23}}{R_{21}}$
s^{n-2}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	
s^{n-3}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$R_{41} = \frac{R_{31}R_{22} - R_{21}R_{32}}{R_{31}}$
s^2	$R_{n-1,1}$	$R_{n-1,2}$	0			
s	$R_{n,1}$	0				$R_{42} = \frac{R_{31}R_{23} - R_{21}R_{33}}{R_{31}}$
s^0	$R_{n+1,1}$	0				

ラウス数列

40

安定性の必要十分条件

(条件R) (i) ラウス数列がすべて正

(ii) 条件Bが成立

ラウス数列の正負の符号の反転回数

⇔

不安定根の数

41

[例題3.1]

$$D_1(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 = 0$$

s^5	+	1		3		6	
s^4	+	1			2		2
s^3	+	1	$= \frac{1 \times 3 - 1 \times 2}{1}$		4	$= \frac{1 \times 6 - 1 \times 2}{1}$	
s^2	-	-2	$= \frac{1 \times 2 - 1 \times 4}{1}$		2	$= \frac{1 \times 2 - 1 \times 0}{1}$	
s^1	+	5	$= \frac{-2 \times 4 - 1 \times 2}{-2}$				不安定
s^0	+	2	$= \frac{5 \times 2 - (-2) \times 0}{5}$				不安定極は 2 個

42

フィードバック制御入門 第3章

[例] 未定係数 K (ゲイン)

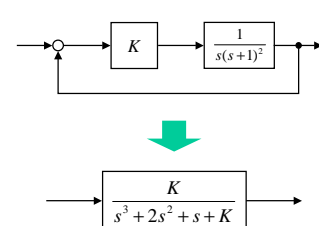
$$D(s) = s^3 + 2s^2 + s + K$$

s^3	1	1
s^2	2	K
s^1	$\frac{2 \times 1 - 1 \times K}{2} = \frac{2-K}{2}$	$\Rightarrow 2-K$
s^0	$\frac{(2-K) \times K - 2 \times 0}{2-K} = K$	ある行に正の数 をかけてもよい

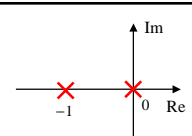
よって $2-K > 0$ かつ $K > 0$
 $\therefore 0 < K < 2$ ならば安定

43

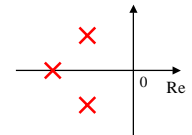
制御対象の安定化

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$


制御対象 $P(s)$ の極配置



閉ループ系の極配置 ($K=1$)



44

[例]

$$D_2(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

s^5	+ 1	6	4
s^4	+ 1	3	1
s^3	+ $3 = \frac{1 \times 6 - 1 \times 3}{1}$	$3 = \frac{1 \times 4 - 1 \times 1}{1}$	
s^2	+ $2 = \frac{3 \times 3 - 1 \times 3}{3}$	$1 = \frac{3 \times 1 - 1 \times 0}{3}$	
s^1	+ $1.5 = \frac{2 \times 3 - 3 \times 1}{2}$		
s^0	+ $1 = \frac{1.5 \times 1 - 2 \times 0}{1.5}$		

よって **安定**

45

フルビッツの安定判別法

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \quad (n \times n)$$

46

(左上の) $k \times k$ の主座小行列式 H_k ($k=1 \sim n$)

$$H_1 = a_{n-1}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

安定性の必要十分条件

(条件H) (i) $H_1 \sim H_n$ がすべて正
(ii) 条件Bが成立 すべての係数 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 が正

47

[例題 3.2]

$$D(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = a_2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 = a_0(a_2 a_1 - a_0) = a_0 H_2 > 0$$

$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_2 a_1 - a_0 > 0$ **安定**

48

フィードバック制御入門 第3章

[例題 3.3]

$$D(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} H_1 = 1 \\ H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 3 \\ H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 1 - 9 - 4 \\ \qquad \qquad \qquad = 6 \\ H_4 = 9 \\ H_5 = 9 \end{array}$$

よって

$$H_1 = 1, H_2 = 3, H_3 = 6, H_4 = 9, H_5 = 9$$

すべて正

よって 安定

49

フルビッツの安定判別法の簡略化(リエナール, シパール)

(条件 B)のもとで

$n = 2k$ のとき $H_3, H_5, \dots, H_{2k-1}$ がすべて正

$n = 2k + 1$ のとき H_2, H_4, \dots, H_{2k} がすべて正

50

[例]

$$D(s) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

$$H = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_0a_3^2$$

$$= a_1(a_2a_3 - a_1) - a_0a_3^2 > 0$$

だけでよい

51