第2章 ダイナミカルシステムの表現

2.1 ダイナミカルシステム

2.2 伝達関数

キーワード：ダイナミカルシステム, システムの線形化, 伝達関数

学習目標： 入出力を動的に関係づけるダイナミカルシステムとシステムの線形化の概念を理解する．そして，伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する．

第2章 ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

2.3 ブロック線図

キーワード： 伝達関数, ブロック線図, 等価変換

学習目標：様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する．また，伝達関数で表された要素の結合と信号の流れのようすを，ブロック線図により表す方法を習得する．

2. ダイナミカルシステムの表現

2.1 ダイナミカルシステム

線形ダイナミカルシステム

（入力）―（出力）：因果関係

自然科学 / 工学の法則

（運動系） ニュートンの運動の法則

（回路系） キルヒホッフの法則

図 2.1 ダイナミカルシステム

［例 2.1］ ばね系

ばね定数 K [N/m]

（入力）力 $f(t)$ [N]

（出力）ばねの伸び $x(t)$ [m]

フックの法則

$$x(t)=\frac{1}{K}f(t)$$

$$(f(t)=Kx(t))$$

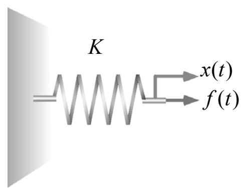
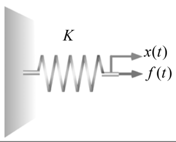


図 2.2 ばね系

静的システム

時刻 $t=t_0$ の出力 $y(t_0)$ は当該時刻の入力 $u(t_0)$ だけから一意に定まり，入力の過去の履歴 $\{u(t):0\le t<t_0\}$ に無関係

$$x(t)=\frac{1}{K}f(t)$$



ダイナミカルシステム（動的システム）

現在時刻の出力 $y(t_0)$ は入力の現在時刻の値 $u(t_0)$ だけでなく過去の履歴にも依存

［例 2.2］ 質量―ばね―ダンパ系

質量 M [kg]

ばね定数 K [N/m]

（入力）力 $f(t)$ [N]

（出力）変位 $x(t)$ [m]

粘性摩擦係数 D [N·s/m]

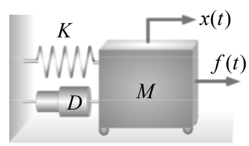


図 2.3 質量―ばね―ダンパ系

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}=f(t)-Kx(t)-D\frac{dx(t)}{dt}$$

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+D\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=f(t)$$

2階の微分方程式

［例 2.3］ RLC 回路

$$LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2}+RC\frac{de_o(t)}{dt}+e_o=e_i$$

2階の微分方程式

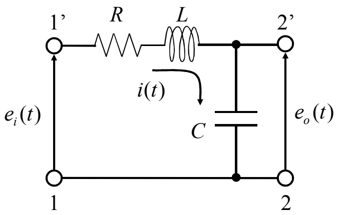


図 2.4 RLC回路

システム的アプローチ

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0u(t)$$

y : 出力
u : 入力
$a_0\sim a_2, b_0$: 定係数

（初期値 $=0$ で）

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

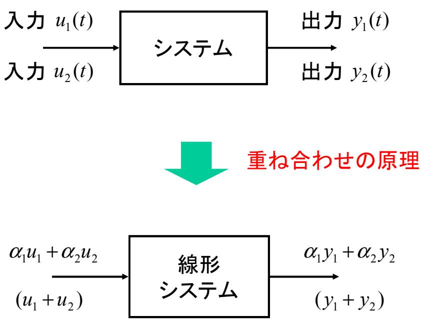
例えば, $a_2=a_0=0$, $a_1=b_0=1$ のとき $\frac{dy(t)}{dt}=u$ より

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau \quad \text{（初期値 $=0$ ）}$$

ダイナミカルシステムの基本表現 （微分方程式）

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y$$
$$=b_m\frac{d^mu}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u$$

線形システム



システムの線形化

［例 2.4］ 水位系

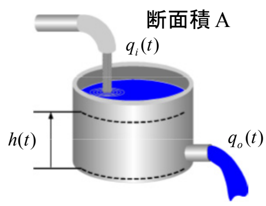


図 2.5 水位系

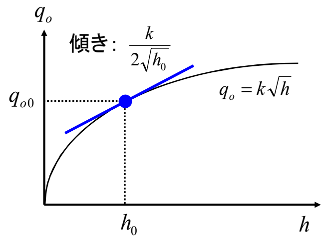


図 2.6 線形化

［例 2.12］ 磁気浮上系

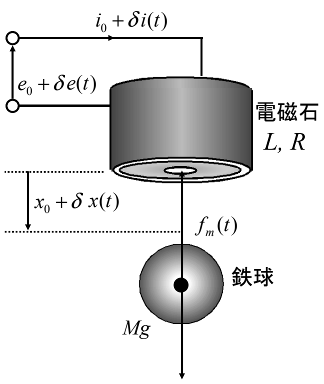
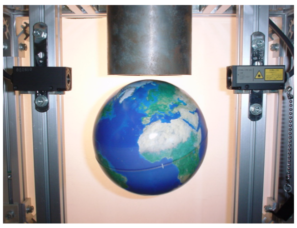


図 2.9 磁気浮上系



2.2 伝達関数

微分方程式表現の問題点

［例 2.5］ システムの結合（微分方程式）

$$\begin{cases}\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\frac{dy_1}{dt}+3y_1=\frac{du_1}{dt}+u_1\\[2mm] \frac{d^2y_2}{dt^2}+3\frac{dy_2}{dt}+3y_2=2\frac{dy_1}{dt}+y_1\end{cases}$$

$$u_1 \longrightarrow y_1 \longrightarrow y_2 \quad \text{結合}$$

$$\text{伝達関数}=\frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$$

（すべての初期値 $=0$ ）

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^mu}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u$$

「微分する」⟶「s をかける」

$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]\qquad U(s)=\mathcal{L}[u(t)]$

$$a_ns^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+\cdots+a_1sY(s)+a_0Y(s)$$
$$=b_ms^mU(s)+b_{m-1}s^{m-1}U(s)+\cdots+b_1sU(s)+b_0U(s)$$

$$(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)$$
$$=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

伝達関数 ＝ $\dfrac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$

$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ の定義より　$Y(s)=G(s)U(s)$

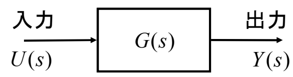


図 2.7　伝達関数

［例 2.6］システムの結合（伝達関数）

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}=\frac{s+1}{s^2+2s+3},\quad \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+1}$$

伝達関数

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}=\frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}\cdot\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+1}\cdot\frac{s+1}{s^2+2s+3}$$

ダイナミクス　微分 / 積分　➡　s の 乗算 / 除算

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

加減乗除の代数的演算のみでよい

システムの結合（分離）の表現にメリット

［例 2.7］　ばね系

$x(t)=\dfrac{1}{K}f(t)$　　$f(t)$：入力　$x(t)$：出力

ラプラス変換　$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$　$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$

$$X(s)=\frac{1}{K}F(s)$$

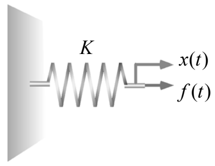


図 2.2　ばね系

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{K}$$

伝達関数 ＝ $\dfrac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$

［例 2.9］　RC 回路

$$RC\frac{de_o(t)}{dt}+e_o(t)=e_i(t)$$

$e_i(t)$：入力
$e_o(t)$：出力

ラプラス変換　$E_i(s)=\mathcal{L}[e_i(t)]$　$E_o(s)=\mathcal{L}[e_o(t)]$　（すべての初期値＝0）

$$RCsE_o(s)+E_o(s)=E_i(s)$$
$$(RCs+1)E_o(s)=E_i(s)$$

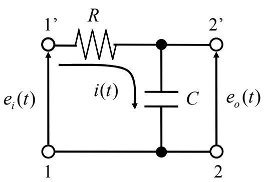


図 2.8　RC回路

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

［例 2.10］　質量ーばねーダンパ系

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+D\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=f(t)$$

$f(t)$：入力
$x(t)$：出力

ラプラス変換　$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$　$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$　（すべての初期値＝0）

$$Ms^2X(s)+DsX(s)+KX(s)=F(s)$$
$$(Ms^2+Ds+K)X(s)=F(s)$$

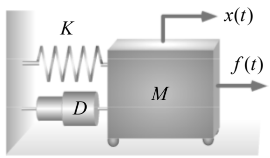


図 2.3　質量ーばねーダンパ系

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Ds+K}$$

[例 2.11]　RLC 回路

$$LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2}+RC\frac{de_o(t)}{dt}+e_o(t)=e_i(t)$$

$e_i(t)$: 入力
$e_o(t)$: 出力

ラプラス変換　$E_i(s)=\mathcal{L}[e_i(t)]$
$E_0(s)=\mathcal{L}[e_0(t)]$
（すべての初期値 $=0$）

$$LCs^2E_o(s)+RCsE_o(s)+E_o(s)=E_i(s)$$
$$(LCs^2+RCs+1)E_o(s)=E_i(s)$$

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

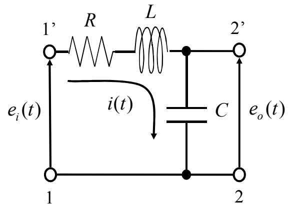


図 2.4　RLC回路

伝達関数 ＝ $\dfrac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$

[例 2.9]　RC 回路

$e_i(t)$: 入力
$e_o(t)$: 出力

$$RC\frac{de_o(t)}{dt}+e_o(t)=e_i(t)$$

ラプラス変換　$E_i(s)=\mathcal{L}[e_i(t)]$
$E_o(s)=\mathcal{L}[e_o(t)]$
（すべての初期値 $=0$）

$$RCsE_o(s)+E_o(s)=E_i(s)$$
$$(RCs+1)E_o(s)=E_i(s)$$

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

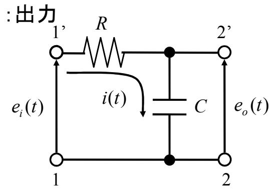


図 2.8　RC回路

[例 2.10]　質量ーばねーダンパ系

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+D\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=f(t)$$

$f(t)$: 入力
$x(t)$: 出力

ラプラス変換　$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$
$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
（すべての初期値 $=0$）

$$Ms^2X(s)+DsX(s)+KX(s)=F(s)$$
$$(Ms^2+Ds+K)X(s)=F(s)$$

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Ds+K}$$

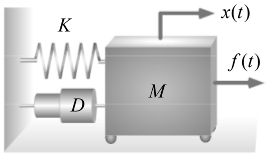
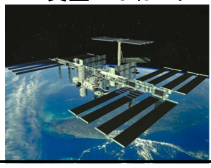


図 2.3　質量ーばねーダンパ系



[例 2.11]　RLC 回路

$$LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2}+RC\frac{de_o(t)}{dt}+e_o(t)=e_i(t)$$

$e_i(t)$: 入力
$e_o(t)$: 出力

ラプラス変換　$E_i(s)=\mathcal{L}[e_i(t)]$
$E_o(s)=\mathcal{L}[e_o(t)]$
（すべての初期値 $=0$）

$$LCs^2E_o(s)+RCsE_o(s)+E_o(s)=E_i(s)$$
$$(LCs^2+RCs+1)E_o(s)=E_i(s)$$

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

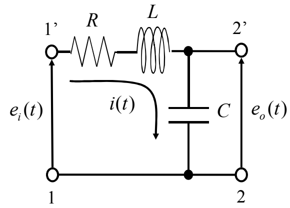


図 2.4　RLC回路

システム的アプローチ
物知的実体の違いを越えてこれらを数理的に記述されるダイナミカルシステムとして普遍的に捉えその中に共通する概念や方法論を構築していく

表 2.4　物理システムのアナロジー

機械系（直線運動）	機械系（回転運動）	電気系	水位系	熱系
力 f [N]	トルク τ [N·m]	電圧 e [V]	水位 h [m]	温度 θ [K]
速度 v [m/s]	角速度 ω [rad/s]	電流 i [A]	流量 q [m^3/s]	熱流量 q [J/s]
変位 x [m]	角変位 θ [rad]	電荷 q [C]	流体量 V [m^3]	熱量 Q [J]
質量 M [kg]	慣性モーメント J [$kg\cdot m^2$]	インダクタンス L [H]		
粘性摩擦係数 D [N·s/m]	粘性摩擦係数 B [N·m·s/rad]	抵抗 R [Ω]	出口抵抗 R [s/m^2]	熱抵抗 R [K·s/J]
ばね定数 K [N/m]	ばね定数 K [N·m/rad]	容量 C [F]	液面面積 A [m^2]	熱容量 C [J/K]

[例 2.13]　むだ時間要素

$$y(t)=u(t-L)\qquad L=l/v$$

ラプラス変換　$\mathcal{L}[f(t-a)]=e^{-as}F(s)$
（ラプラス変換の【性質5】）

$$Y(s)=e^{-sL}U(s)$$

伝達関数　$G(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=e^{-sL}$$

パデー近似

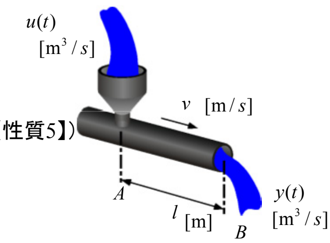


図 2.10　むだ時間要素の例

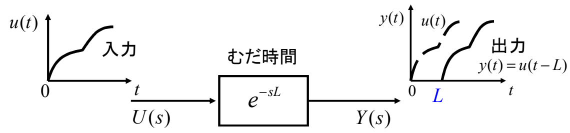


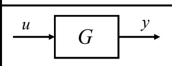
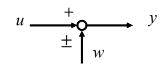
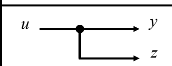
図 2.11　むだ時間要素

2.3 ブロック線図

ブロック線図
　システムの結合 / 信号の流れの様子を表現

ブロック線図の基本単位
　ブロック
　加え合せ点
　引き出し点

表 2.1　ブロック線図の基本単位

基本単位	記号	式
ブロック		$y = Gu$
加え合せ点		$y = u \pm w$
引き出し点		$y = u,\ z = u$

[例 2.14]　DC サーボモータ

電機子回路

$$e_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t)$$

逆起電力

$$e_b(t) = K_b \omega(t)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

発生トルク

$$\tau(t) = K_\tau i_a(t)$$

回転運動

$$\tau(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$$

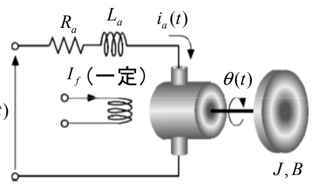


図 2.12　DCサーボモータ

ラプラス変換

電機子回路 $e_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t)$	$i_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a}\left(e_a(s) - e_b(s)\right)$
逆起電力 $e_b(t) = K_b \omega(t)$	$e_b(s) = K_b \omega(s)$
$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$\theta(s) = \frac{1}{s}\omega(s)$
発生トルク $\tau(t) = K_\tau i_a(t)$	$\tau(s) = K_\tau i_a(s)$
回転運動 $\tau(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$	$\omega(s) = \frac{1}{Js + B}\tau(s)$

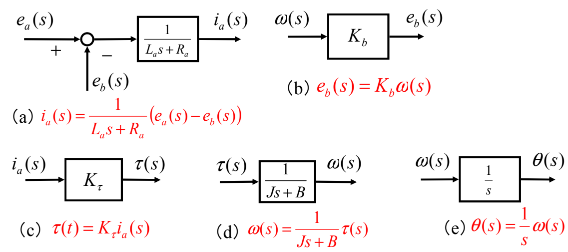


図 2.13　DC サーボモータの各部のブロック線図

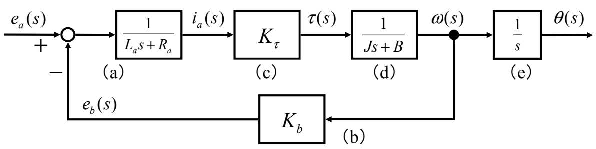
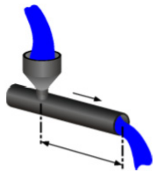


図 2.14　DC サーボモータの全体のブロック線図

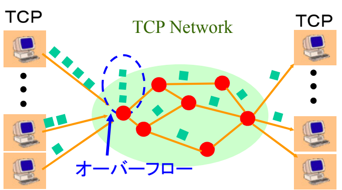
むだ時間要素

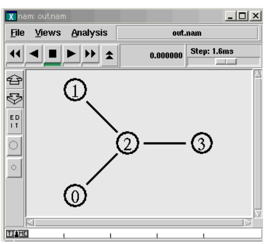


アナロジー

システム的アプローチ

Network

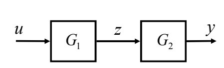
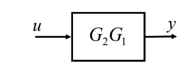
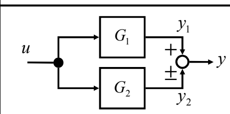
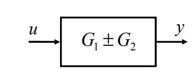
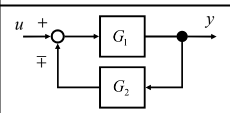
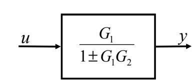




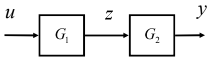
ブロック線図の結合方式

直列結合，並列結合，フィードバック結合

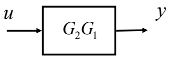
表 2.2　ブロック線図の結合方式

結合方式	結合前	結合後
直列結合		
並列結合		
フィードバック結合		

直列結合

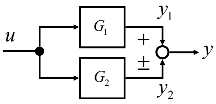


$$\begin{cases} y = G_2 z \\ z = G_1 u \end{cases}$$

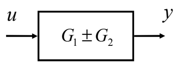


$$y = G_2 G_1 u$$

並列結合



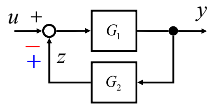
$$\begin{cases} y_1 = G_1 u \\ y_2 = G_2 u \\ y = y_1 \pm y_2 \end{cases}$$



$$y = G_1 u \pm G_2 u$$
$$= (G_1 \pm G_2) u$$

フィードバック結合

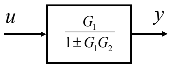
- ネガティブ・フィードバック
- ポジティブ・フィードバック



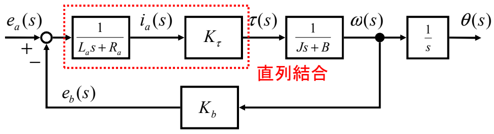
ネガティブ・フィードバック

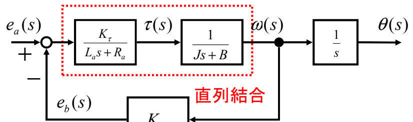
$$\begin{cases} z = G_2 y \\ y = G_1 (u - z) \end{cases}$$

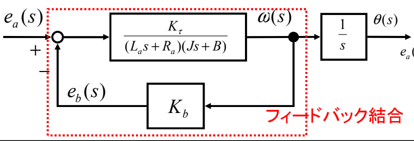
$$y = G_1 (u - G_2 y)$$
$$(1 + G_1 G_2) y = G_1 u$$
$$y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u$$



[例 2.15]　DC サーボモータ







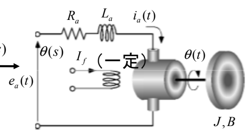
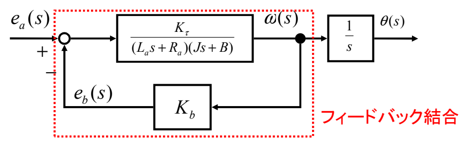
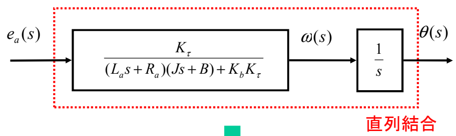


図 2.13　DCサーボモータ





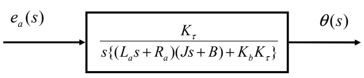
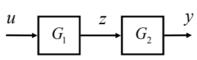
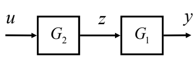
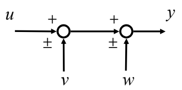
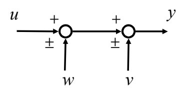
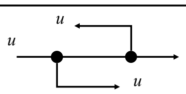
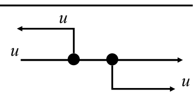
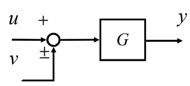
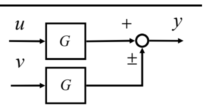
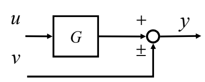
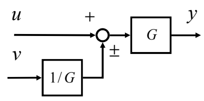
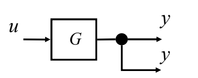
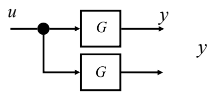
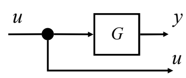
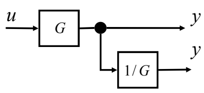


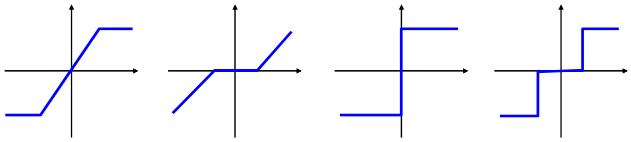
図 2.15　DC サーボモータのブロック線図の簡略化

表 2.3　ブロック線図の等価変換

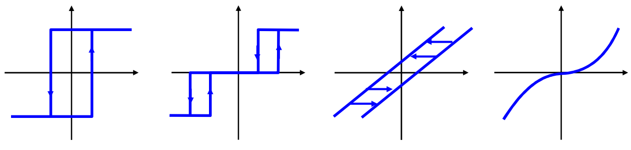
等価変換	変換前	変換後
ブロックの入れ替え		
加え合せ点の入れ替え		
引き出し点の入れ替え		

等価変換	変換前	変換後
ブロックと加え合せ点の入れ替え(1)		
ブロックと加え合せ点の入れ替え(2)		
ブロックと引き出し点の入れ替え(1)		
ブロックと引き出し点の入れ替え(2)		

代表的な非線形要素



(a)飽和　(b)不感帯　(c)二位置リレー　(d)三位置リレー



(e)二位置リレー（ヒステリシスあり）　(f)三位置リレー（ヒステリシスあり）　(g)バックラッシュ　(h)わん曲

付録

[例 2.4]　水位系

$$\frac{dAh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t)$$

$$q_o(t) = k\sqrt{h(t)}$$ （ベルヌーイの定理）

$$A\frac{dh(t)}{dt} + k\sqrt{h(t)} = q_i(t)$$

非線形項

$\delta q_i(t)$：入力

$\delta h(t)$：出力

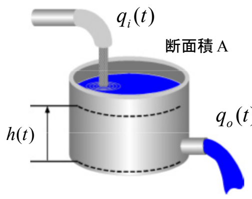


図 2.5　水位系

線形化

$$q_{o0} = q_{i0} = k\sqrt{h_0}$$

動作点からの微小変化分に着目

$$q_i(t) = q_{i0} + \delta q_i(t)$$

$$q_o(t) = q_{o0} + \delta q_o(t)$$

$$h(t) = h_0 + \delta h(t)$$

$$A\frac{d}{dt}\left(h_0 + \delta h(t)\right) = \left(q_{o0} + \delta q_o(t)\right) - \left(q_{i0} + \delta q_i(t)\right)$$

$$q_{o0} + \delta q_o(t) = k\sqrt{h_0 + \delta h(t)}$$

$$q_{o0} + \delta q_o(t) = k\sqrt{h_0}\left(1 + \frac{\delta h(t)}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= k\sqrt{h_0}\left(1 + \frac{\delta h(t)}{2h_0} + \cdots\right)$$ テイラー展開

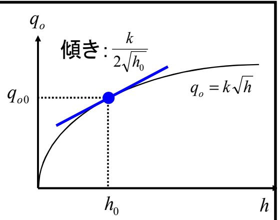


図 2.6　線形化

h_0 の大きさに比べて δh が十分に小さいものとし, 2次以上の項を省略する

$$q_{o0} + \delta q_o(t) \approx k\sqrt{h_0}\left(1 + \frac{\delta h(t)}{2h_0}\right) = k\sqrt{h_0} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t)$$

$$\delta q_o(t) = \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t) \quad \left(\because q_{o0} = q_{i0} = k\sqrt{h_0}\right)$$

$$A\frac{d}{dt}\delta h(t) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t) = \delta q_i(t)$$ 線形の微分方程式

[例 2.8]　水位系

$$A\frac{d}{dt}\delta h(t) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t) = \delta q_i(t)$$

$\delta q_i(t)$：入力

$\delta h(t)$：出力

ラプラス変換

$$Q_i(s) = \mathcal{L}[\delta q_i(t)]$$

$$H(s) = \mathcal{L}[\delta h(t)]$$

（すべての初期値 = 0）

$$AsH(s) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}H(s) = Q_i(s)$$

$$(As + \frac{k}{2\sqrt{h_0}})H(s) = Q_i(s)$$

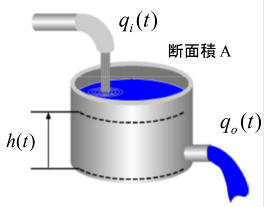


図 2.5　水位系

伝達関数　$G(s)$

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{As + k/2\sqrt{h_0}}$$

[例 2.12]　磁気浮上系

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2 \\ L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t) \end{cases}$$

非線形項

$$x(t) = x_0 + \delta x(t), \quad i(t) = i_0 + \delta i(t)$$

$$e(t) = e_0 + \delta e(t)$$

線形化　$\left(\frac{i(t)}{x(t)}\right)^2 = \left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t) \\ L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t) \end{cases}$$

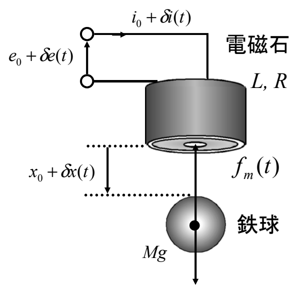


図 2.9　磁気浮上系

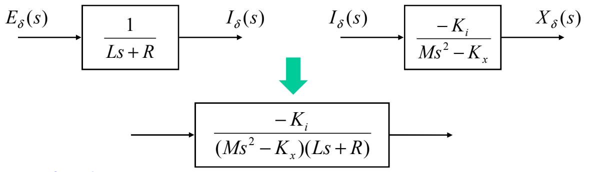
$$K_x = \frac{2ki_0^2}{x_0^3}, \quad K_i = \frac{2ki_0}{x_0^2}$$

ラプラス変換 $E_\delta(s)=\mathcal{L}[\delta e(t)],\quad X_\delta(s)=\mathcal{L}[\delta x(t)]$

$I_\delta(s)=\mathcal{L}[\delta i(t)]$ （すべての初期値 $=0$）

$$LsI_\delta(s)+RI_\delta(s)=E_\delta(s)$$
$$\Rightarrow I_\delta(s)=\frac{1}{Ls+R}E_\delta(s)$$

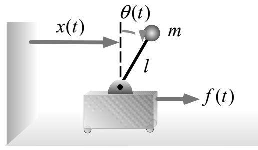
$$Ms^2X_\delta(s)=K_xX_\delta(s)-K_iI_\delta(s)$$
$$\Rightarrow X_\delta(s)=\frac{-K_i}{Ms^2-K_x}I_\delta(s)$$



伝達関数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{X_\delta(s)}{E_\delta(s)}=\frac{-K_i}{(Ms^2-K_x)(Ls+R)}$$

［2章 演習問題【4】］ 倒立振子



$$\begin{cases} M\ddot{x}(t)+m\dfrac{d^2}{dt^2}(x(t)+l\sin\theta(t))=f(t) \\ ml\ddot{\theta}(t)=mg\sin\theta(t)-m\ddot{x}(t)\cos\theta(t) \end{cases}$$

式整理

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}(t)-ml\underline{\dot{\theta}^2(t)}\,\underline{\sin\theta(t)}+ml\ddot{\theta}(t)\underline{\cos\theta(t)}=f(t) \\ ml\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)\underline{\cos\theta(t)}=mg\underline{\sin\theta(t)} \end{cases}$$

非線形項

線形化

$\theta(t)\approx 0$ であるとき，

$\sin\theta(t)\approx\theta(t),\quad \cos\theta(t)\approx 1,\quad \dot{\theta}^2(t)\approx 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin\theta(t)&=\theta(t)-\frac{\theta(t)^3}{3!}+\cdots \\ \cos\theta(t)&=1-\frac{\theta(t)^2}{2!}+\cdots \end{aligned} \right\}$$

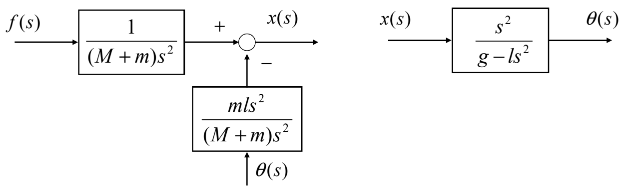
$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}(t)+ml\ddot{\theta}(t)=f(t) \\ ml\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)=mg\theta(t) \end{cases}$$

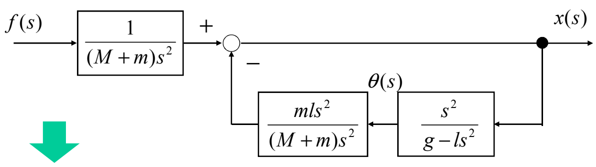
$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}(t)+ml\ddot{\theta}(t)=f(t) \\ ml\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)=mg\theta(t) \end{cases}$$

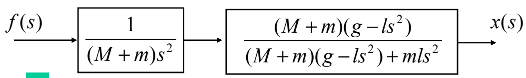
ラプラス変換 $x(s)=\mathcal{L}[x(t)],\ \theta(s)=\mathcal{L}[\theta(t)],\ f(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

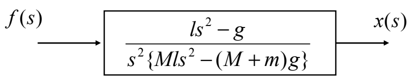
$$(M+m)s^2x(s)+mls^2\theta(s)=f(s)$$
$$\Rightarrow x(s)=\frac{1}{(M+m)s^2}f(s)-\frac{mls^2}{(M+m)s^2}\theta(s)$$

$$mls^2\theta(s)+ms^2x(s)=mg\theta(s)$$
$$\Rightarrow \theta(s)=\frac{s^2}{g-ls^2}x(s)$$









伝達関数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{x(s)}{f(s)}=\frac{ls^2-g}{s^2\{Mls^2-(M+m)g\}}$$