フィードバック制御入門 付録

付録

A.1 **複素数**

キーワード： **虚数，複素数，極形式，オイラーの公式**

A.2 **ラプラス変換**

キーワード： **ラプラス変換，ラプラス変換表**

A.3 **逆ラプラス変換**

キーワード： **逆ラプラス変換**

学習目標：フィードバック制御の基礎数学である複素数について理解する．基本的な関数のラプラス変換，逆ラプラス変換を理解する．

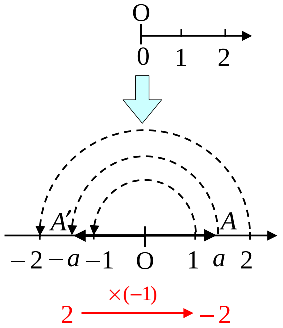
1

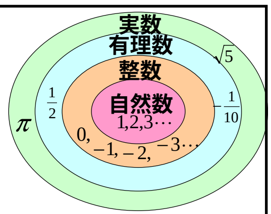
A.1 複素数

2

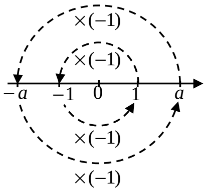
虚数とは？

正の数から負の数への変換





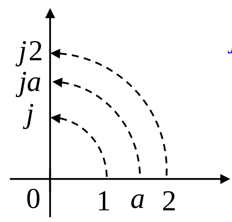
$(-1)\times(-1)=1$



-1 をかけるという演算は，原点Oを中心とする180°の回転

では90°の回転は？？

3



j をかけるという演算は，原点Oを中心とする90°の回転

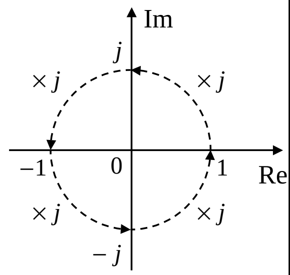
$1 \xrightarrow[90^\circ\text{の回転}]{\times j} j \xrightarrow[90^\circ\text{の回転}]{\times j} -1$

180°の回転

$j^2=-1$　180°**の回転**

$j^3=j\times j^2=-j$　270°**の回転**

$j^4=1$　360°**の回転**



4

複素数

一組の実数 $(x,\ y)$

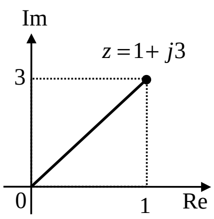
複素数 $z = \underbrace{x}_{\text{実数部}} + \underbrace{jy}_{\text{虚数部}}$　　$j=\sqrt{-1}$

$x=\mathrm{Re}(z)$　$y=\mathrm{Im}(z)$

例

$z=1+j3$

$x=1$
$y=3$



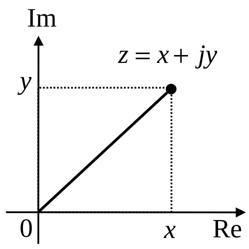


図　複素平面

5

複素数の加減乗除

和： $(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2)=(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)$

例

$z_1=1+j3$　$z_2=2-j2$

$$z_1+z_2=(1+j3)+(2-j2)=(1+2)+j(3-2)$$
$$=3+j$$

差： $(x_1+jy_1)-(x_2+jy_2)=(x_1-x_2)+j(y_1-y_2)$

例

$$z_1-z_2=(1+j3)-(2-j2)=(1-2)+j(3+2)$$
$$=-1+j5$$

6

積： $(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$

例

$$z_1 = 1 + j3 \quad z_2 = 2 - j2$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + j3)(2 - j2) \\ &= (1\cdot 2 - 3\cdot(-2)) + j(1\cdot(-2) + 2\cdot 3) \\ &= 8 + j4 \end{aligned}$$

商： $\dfrac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + j(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

例

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + j3}{2 - j2} = \frac{(1 + j3)(2 + j2)}{(2 - j2)(2 + j2)}$$

$$= \frac{1\cdot 2 - 3\cdot 2 + j(3\cdot 2 + 1\cdot 2)}{2^2 + (-2)^2} = \frac{-4 + j8}{8} = \frac{-1 + j2}{2}$$

7

複素平面

極形式

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

絶対値 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

偏角 $\theta = \arg z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

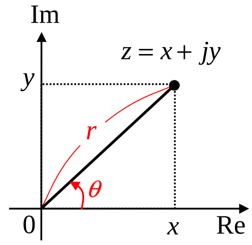


図 複素平面

8

極形式の乗除

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

積： $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

例

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad z_2 = 4\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 8\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + j\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

9

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

商： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

例

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad z_2 = 4\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + j\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$

10

オイラーの公式

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$$

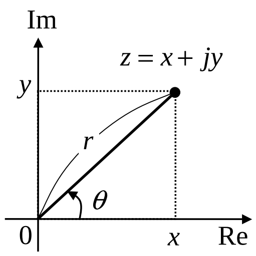


図 複素平面

11

極形式の乗除

2つの複素数 $z_1 = r_1e^{j\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{j\theta_2}$

積： $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ **商**： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

例 $z_1 = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$ $z_2 = 4e^{-j\frac{\pi}{3}}$

積： $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 4e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{j\frac{\pi}{6}}$

商： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \dfrac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}}$

12

複素平面上での複素数の和

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

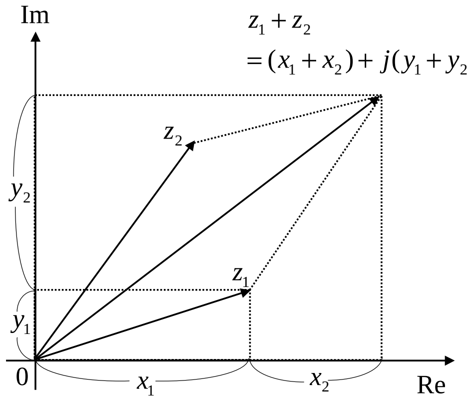
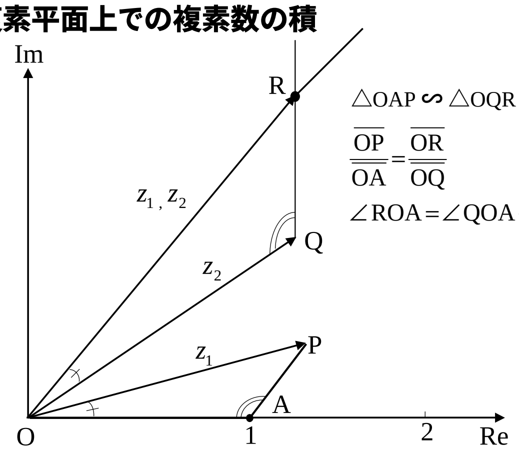


図　複素平面上での複素数の和

13

複素平面上での複素数の積



△OAP ∽ △OQR

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}}$$

∠ROA＝∠QOA＋∠POA

図　複素平面上での複素数の積

14

(ステップ1)　図において，z_1，z_2 を示す点をP，Qとして，実軸上に$\overline{OA}=1$なる点Aをとる．

(ステップ2)　△OAPに相似な△OQRを作る．これは原点0から $\overline{OQ}$ となす角が∠POA と等しくなる直線，および点Qから $\overline{OQ}$ となす角が∠OAP と等しくなる直線を引けばその2直線の交点がRとしてもとまる．

(ステップ3)　得られたベクトル $\overrightarrow{OR}$ が $z_1 z_2$を示す．これは，

△OAP ∽ △OQR

であるから，$\overline{OR}$の偏角は

$$\angle ROA = \angle QOA + \angle POA = \arg z_1 + \arg z_2$$

であり，また，

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}}$$

となるから

$$\overline{OR} = \overline{OR} \cdot \overline{OQ} = |z_1| \cdot |z_2| \qquad (\because \overline{OA} = 1)$$

を得る．

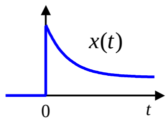
15

A.2　ラプラス変換

ラプラス変換

因果信号　$x(t) = 0,\ t < 0$　とする

(片側ラプラス変換)



ラプラス変換：

因果信号 $x(t)$ のラプラス変換 (Laplace transform) は次式で与えられる。

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \qquad (1)$$

ここで，$\mathcal{L}[\cdot]$ はラプラス変換を表わし，$s(=\sigma + j\omega)$ は複素数である。

16

片側ラプラス変換　$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$

s平面：　時間領域　$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$ s領域　$X(s)$　(複素関数)

ラプラス変換　$s = \sigma + j\omega$

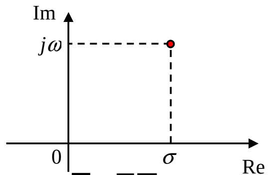


図　s平面

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \{x(t) \underline{e^{-\sigma t}}\} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

収束因子

扱える信号のクラス

指数オーダの関数

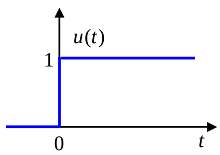
$|x(t)| \le M e^{\alpha t}$　　例　$\sin \omega t,\ \cos \omega t,\ e^{at},\ t^n$　○

$e^{t^2},\ \tan \omega t$　×

17

基本的なラプラス変換

[1]　単位ステップ信号　$u(t)$



$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \Big[\underbrace{e^{-s \cdot 0}}_{=1} - \underbrace{e^{-s \cdot \infty}}_{=0} \Big]$$

$$= \frac{1}{s}$$

収束領域

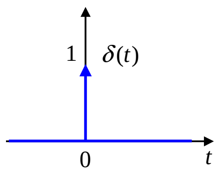
$\mathrm{Re}[s] > 0$

18

[1a] **単位インパルス信号** $\delta(t)$

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$
$$= e^0 = 1$$

単位元



単位インパルス信号の性質

［性質］ 任意の信号 $x(t)$に対して，次の式が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)dt = x(a)$$

19

部分積分(integration by parts)**の復習**：

二つの関数 $f(x)$**と** $g(x)$**が区間** $[a, b]$**で定義され，それらの導関数（それぞれ** $f'(x)$, $g'(x)$ **とする）が存在して連続ならば，次式が成り立つ。**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

[1b] **単位ランプ信号**

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

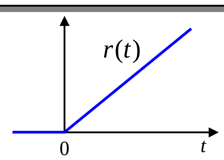


図 (a) **単位ランプ信号**

$$L[r(t)] = \int_0^{\infty} r(t) e^{-st} dt$$
$$= \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} dt$$
$$= \frac{1}{s^2} \qquad (\mathrm{Re}[s] > 0)$$

20

[2] **片側指数信号**

$$e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

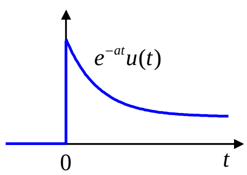


図 (b) **片側指数信号**

$$L\left[e^{-at}u(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$
$$= \frac{1}{-(s+a)} e^{-(s+a)t}\Bigg|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{s+a} \qquad (\mathrm{Re}[s] + a > 0)$$

21

オイラーの公式

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta)$$
$$= \cos\theta - j\sin\theta$$

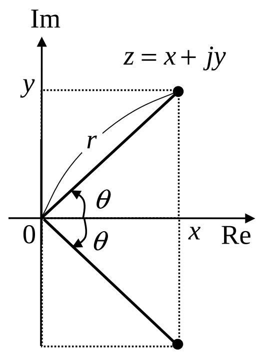


図 複素平面

22

[3] **片側正弦波信号** $\sin\omega t \cdot u(t)$

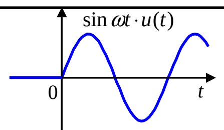


図 片側正弦波信号

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

$$L[\sin\omega t \cdot u(t)] = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\cdot e^{-st} dt$$
$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{-(s-j\omega)} e^{-(s-j\omega)t}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{-(s+j\omega)} e^{-(s+j\omega)t}\Bigg|_0^{\infty}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right)$$
$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

23

オイラーの関係式を用いない方法

$$L[\sin\omega t \cdot u(t)] = \int_0^{\infty} \sin\omega t \cdot e^{-st} dt$$
$$= \left[-\frac{e^{-st}}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\infty} - \frac{s}{\omega}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt$$
$$= \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega}\underline{\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt = \left[\frac{e^{-st}}{\omega}\sin\omega t\right]_0^{\infty} + \frac{s}{\omega}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin\omega t dt$$
$$= \frac{s}{\omega} L[\sin\omega t \cdot u(t)]$$

$$\therefore L[\sin\omega t \cdot u(t)] = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2} L[\sin\omega t \cdot u(t)]$$

$$\therefore L[\sin\omega t \cdot u(t)] = \frac{\frac{1}{\omega}}{1+\frac{s^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

24

ラプラス逆変換：

$X(s)$ の**ラプラス逆変換**は，次式で与えられる。

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds, \quad (t>0)$$

ただし，c は実定数である。

片側ラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

s平面： 時間領域 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$ s領域 $X(s)$ （複素関数）

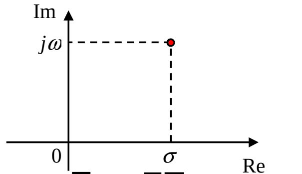


図4.1 s平面

25

表 ラプラス変換対

	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
5	$\sin\omega t\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos\omega t\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

26

表 ラプラス変換対

	$x(t)$	$X(s)$
7	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot u(t),\quad n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{s^n}$
8	$te^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
10	$e^{-at}\sin\omega t\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$e^{-at}\cos\omega t\cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

27

ラプラス変換の性質

【性質1】 **線形性**： a, b を実定数とすると，次式が成り立つ．

$$\mathcal{L}[ax(t)+by(t)] = a\,\mathcal{L}[x(t)] + b\,\mathcal{L}[y(t)] \qquad (1)$$

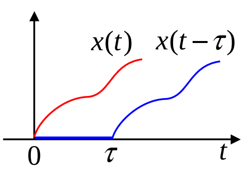
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[ax(t)+by(t)] &= \int_0^{\infty}\{ax(t)+by(t)\}e^{-st}dt\\ &= a\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt + b\int_0^{\infty}y(t)e^{-st}dt\\ &= a\,\mathcal{L}[x(t)] + b\,\mathcal{L}[y(t)]\end{aligned}$$

28

【性質2】 **時間領域推移**：

$$\mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s}\,\mathcal{L}[x(t)] \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t-\tau)] &= \int_0^{\infty}x(t-\tau)e^{-st}dt\\ &= \int_0^{\infty}x(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\cdot e^{-\tau s}dt\\ &= e^{-\tau s}\int_0^{\infty}x(t')e^{-st'}dt'\\ &= e^{-\tau s}\,\mathcal{L}[x(t)]\end{aligned}$$



時間遅延，むだ時間

29

【性質3】 **s 領域推移**：

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}x(t)\right] = X(s+a) \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{-at}x(t)\right] &= \int_0^{\infty}e^{-at}x(t)e^{-st}dt\\ &= \int_0^{\infty}x(t)e^{-(s+a)t}dt\\ &= X(s+a)\end{aligned}$$

30

【性質4】 時間スケーリング：

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (4)$$

ただし, a は正の定数である.

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_0^\infty x(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty x(\xi)e^{-\frac{s}{a}\xi}d\xi = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$\xi = at$ とおくと
$d\xi = a dt$
$dt = \frac{1}{a}d\xi$
$t = \frac{1}{a}\xi$

31

【性質5】 時間微分：
$x(t)$ が微分可能であれば, 次式が成り立つ.

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0) \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}dt \\ &= \left[x(t)e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x(t)se^{-st}dt \quad (\because \text{部分積分}) \\ &= -x(0) + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \quad \left(\begin{array}{l}\text{ラプラス変換の収束} \\ \because x(t)e^{-st} \to 0\ (t\to\infty)\end{array}\right) \\ &= sX(s) - x(0)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

時間領域におけるn階微分 ➡ s領域では s^nを乗じるという代数演算

【性質6】 時間積分：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s) \qquad (6)$$

$h(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ とおくと, $\dot{h}(t) = x(t)$ かつ $h(0) = 0$

$$\mathcal{L}\left[\dot{h}(t)\right] = sH(s) - h(0) = sH(s) \quad (\because \text{【性質5】})$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{h}(t)\right] = \mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

よって $\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[h(t)] = H(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\dot{h}(t)\right] = \frac{1}{s}X(s)$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x(t)dtdt\cdots dt\right] = \frac{1}{s^n}X(s)$$

時間積分 ➡ s 領域では s で割ることに対応する

時間領域における 微積分 ➡ s領域では代数演算である乗除算

【性質7】 s領域での微分：

$$\mathcal{L}[-tx(t)] = \frac{d}{ds}X(s) \qquad (7)$$

$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$ の両辺を s で微分

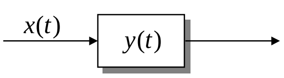
$$\frac{d}{ds}X(s) = \int_0^\infty -tx(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[-tx(t)]$$

34

【性質8】 たたみこみ積分：
二つの信号 $x(t)$, $y(t)$ のたたみこみ積分のラプラス変換は, それぞれの信号のラプラス変換の積に等しい. すなわち

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[x(t)]\mathcal{L}[y(t)] \qquad (8)$$

［復習］ たたみこみ積分



$$\int_{-\infty}^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

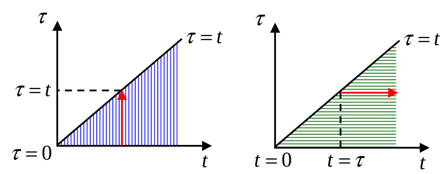
$\left(\begin{array}{l}\text{因果性 } y(t-\tau) = 0, \\ \quad t-\tau < 0 \quad (\tau > t)\end{array}\right)$

$$= \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)dt$$

(因果信号 $x(\tau) = 0,\ \tau < 0$)

35

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_\tau^\infty y(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right] x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty y(t')e^{-st'}dt'\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (\because t' = t-\tau) \\ &= \mathcal{L}[x(t)]\mathcal{L}[y(t)]\end{aligned}$$



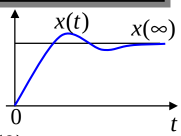
時間領域における たたみこみ積分 ➡ s領域では乗算になる

36

【性質9】 **最終値の定理**：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) \qquad (9)$$

$$Y(s) = \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] \quad \text{とおくと}$$



$$\lim_{s\to 0} Y(s) = \lim_{s\to 0} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to 0} sX(s) - x(0) \quad (\because \text{【性質5】})$$

$$\lim_{s\to 0} Y(s) = Y(0) = \int_0^\infty \dot{x}(t)dt = x(\infty) - x(0)$$

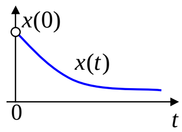
$$\therefore \quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

37

【性質10】 **初期値の定理**：

$$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \qquad (10)$$

$$\lim_{s\to\infty}\left(sX(s) - x(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$$



$$= \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\lim_{s\to\infty}\left[\dot{x}(t)e^{-st}\right]}_{=0\ (s\to\infty)} dt = 0$$

$$\therefore \ x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

38

表　ラプラス変換の性質

1	線形性	$\mathcal{L}[ax(t)+by(t)] = a\,\mathcal{L}[x(t)] + b\,\mathcal{L}[y(t)]$
2	時間推移	$\mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s}\,\mathcal{L}[x(t)]$
3	s 領域推移	$\mathcal{L}\left[e^{-at}x(t)\right] = X(s+a)$
4	時間軸スケーリング	$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
5	時間微分	$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$
6	時間積分	$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s)$

39

表　ラプラス変換の性質

7	s 領域での微分	$\mathcal{L}[-tx(t)] = \frac{d}{ds}X(s)$
8	たたみこみ積分	$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[x(t)]\,\mathcal{L}[y(t)]$
9	最終値の定理	$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$
10	初期値の定理	$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

40

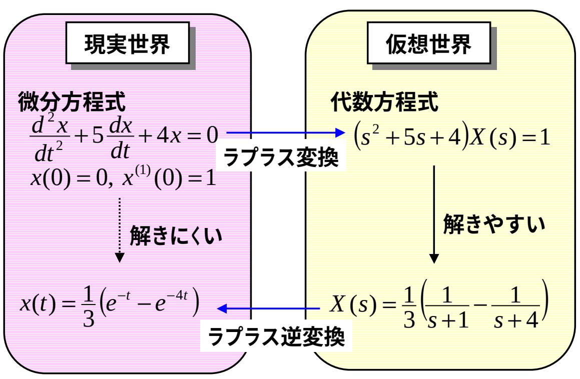


図　変換の利点

41

付録

A.1 **複素数**

キーワード：**虚数，複素数，極形式，オイラーの公式**

A.2 **ラプラス変換**

キーワード：**ラプラス変換，ラプラス変換表**

A.3 **逆ラプラス変換**

キーワード：**逆ラプラス変換**

学習目標：**フィードバック制御の基礎数学である複素数について理解する．基本的な関数のラプラス変換，逆ラプラス変換を理解する．**

42

付録

1.2.3 単位ステップ信号

$$u(t) = \begin{cases} 0, & (t<0) \\ 1, & (t>0) \end{cases} \qquad u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

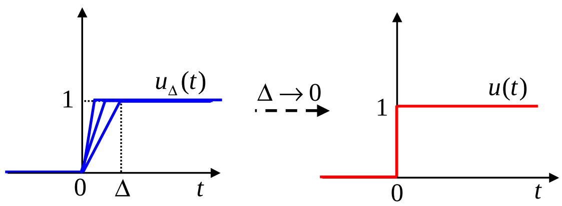


図1.7 単位ステップ信号

1.2.4 単位インパルス信号（ディラックのデルタ関数）

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & (0<t<\Delta) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases} \qquad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

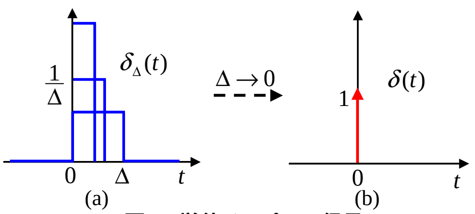


図1.8 単位インパルス信号

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma$$

ステップ信号 $u(t)$

微分 ⇩ ⇧ 積分

インパルス信号 $\delta(t)$

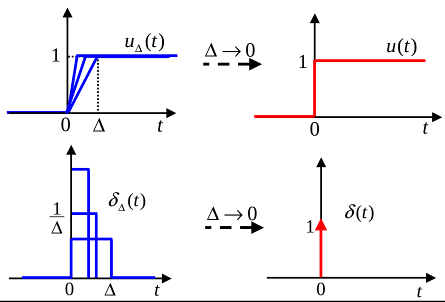


表 1.2 単位インパルス信号の性質

［性質1］ 単位インパルス信号は単位面積をもつ．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

［性質2］ $\delta(t)$は t の偶関数である．すなわち

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

［性質3］ 原点以外では単位インパルス信号の値は 0 である．すなわち

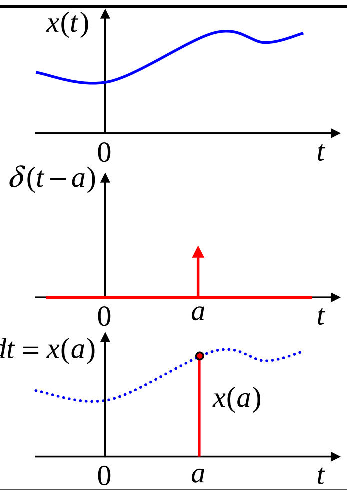
$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

［性質4］ 任意の信号$x(t)$に対して，次の式が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)dt = x(a)$$

あるいは $x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$

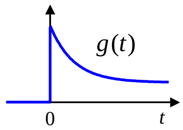
［性質4］



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)dt = x(a)$$

システムの因果性

$g(t)=0,\ t<0$:現時刻の出力 $y(t)$ が, それ以前の入力のみに依存する



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$\left(\because t-\tau<0\Rightarrow\tau>t\right.$ で $\left.g(t-\tau)=0\right)$

$$=\int_{0}^{\infty}g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

(∵変数変換 $t-\tau\to\tau$)

“任意の時刻における出力の値は, 現在および過去の入力データだけによって決まり, 未来の入力の値に依存しない.”

さらに $x(t)=0,\ t<0$ (因果信号) のとき

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$(\because x(\tau)=0,\ -\infty<\tau<0)$

49

2.4.3 システムの安定性

任意の有界な入力信号 $|x(t)|<b$ をシステムに加えたときに, 出力も有界になる

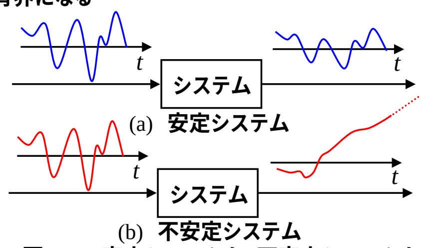


図 1.25 安定システムか, 不安定システムか？

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)g(t-\tau)d\tau\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)x(t-\tau)d\tau\right|$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}|g(\tau)|\cdot|x(t-\tau)|d\tau\le b\cdot\underline{\int_{-\infty}^{\infty}|g(\tau)|d\tau}$$ 有界 ⇔ 安定

50

4.3 ラプラス変換とフーリエ変換

フーリエ変換 $\mathcal{F}[\cdot]$ $s=j\omega$

$$X(\omega)=\int_{\underline{-\infty}}^{\infty}x(t)e^{\underline{-j\omega t}}dt$$

因果 $\to 0$

絶対可積分 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$ $\left(\lim_{t\to\pm\infty}x(t)=0\right)$

$x\in L_1$ [p.62]

ラプラス変換 $s=\sigma+j\omega$

$$X(s)=\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\{x(t)\underbrace{e^{-\sigma t}}_{\text{収束因子}}\}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

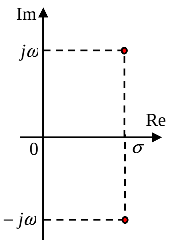


図 s平面

より広いクラスの信号

指数オーダの関数

$|x(t)|\le Me^{\alpha t}$ 例 $\sin\omega t,\ \cos\omega t,\ e^{at},\ t^{n}$ ○

$e^{t^2},\ \tan\omega t$ ×

51