**9 章演習問題【3】**

図 9.5 の 2 自由度制御系において, 制御対象の公称値が $P(s) = 1/(s-2)$ で与えられ, 制御器としてつぎの (a), (b) の組を考える.

$$\begin{array}{lll} (a) & F(s) = \frac{b}{s+a}, & K(s) = c \\ (b) & F(s) = \frac{c}{s^2+as+b}, & K(s) = \frac{ds+e}{s} \end{array}$$

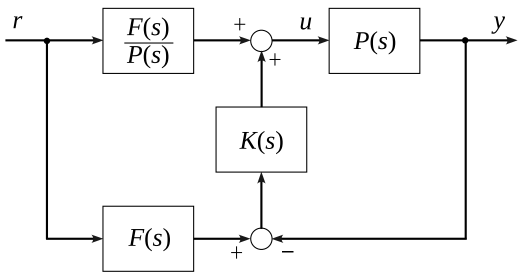


図 1: 図 9．5

このとき, (a), (b) のそれぞれに対して下記の問いに答えよ.

(1) 制御系が安定となるためにパラメータ ($a$〜$e$) が満たすべき条件を求めよ.
(2) $r$ をステップ関数とするとき, $y$ が定常偏差なくこれに追従するためにパラメータが満たすべき条件を求めよ.
(3) 上記に加えて, オーバーシュートが生じないための条件を求めよ.
(4) 以上の条件のもとで, 制御対象が $1/(s-2) \to 1/(s-1)$ に変動したとき, 定常偏差はどうなるか.

**【解答】**

(a)

(1) 制御系が安定となる条件は, $F(s)$, $P^{-1}(s)F(s)$ が安定かつ, $P(s)$, $K(s)$ からなる閉ループ系が内部安定であることである. $F(s) = b/(s+a)$, $P^{-1}(s)F(s) = b(s-2)/(s+a)$ より, これらが安定となる条件は $\underline{a > 0}$ となる. 次に, 閉ループ系の特性多項式は $P(s)$ と $K(s)$ の分子・分母の多項式を

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)} \tag{1}$$

とすると

$$\Phi(s) = D_P(S)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) \tag{2}$$

であることより, $\Phi(s) = s + (c-2)$. よって, 内部安定のための条件は $\underline{c > 2}$ となる. $\underline{\text{よって, } a > 0,\ c > 2.}$

(2) $r$ から $y$ への伝達関数は,

$$\begin{aligned} y &= P\left\{\frac{F}{P}r + K(Fr - y)\right\} \\ y - KPy &= Fr - KPFr \\ y &= Fr \end{aligned} \tag{3}$$

よって $G_{yr} = F = b/(s+a)$ となる. 系が安定であるとき定常偏差は

$$e_s = 1 - \lim_{s=0} sG_{yr}(s)\frac{1}{s} = 1 - \lim_{s=0} \frac{b}{s+a} = 1 - \frac{b}{a} = 0 \tag{4}$$

となればよいので, (1) の条件かつ $\underline{a=b}$ が条件となる. よって, $\underline{a>0,\ c>2,\ a=b}$ である.

(3) 先に示した通り, $r$ から $y$ への伝達関数は $G_{yr}=F=b/(s+a)$ (1 次系) であるので, 安定であればオーバーシュートは生じない.

(4) 制御対象が $P=1/(s-2)$ から $\tilde{P}=1/(s-1)$ と変化したので, $P$ を $\tilde{P}$ としたときの $r$ から $y$ への伝達関数を求めると

$$
\begin{aligned}
y &= \tilde{P}\left\{\frac{F}{P}r+K(Fr-y)\right\}\\
(1+\tilde{P}K)y &= \left\{\frac{\tilde{P}F}{P}+\tilde{P}KF\right\}r\\
y &= \frac{\tilde{P}F+\tilde{P}PKF}{P(1+\tilde{P}K)}r=\frac{\tilde{P}+\tilde{P}PK}{P(1+\tilde{P}K)}Fr\\
G_{yr} &= \frac{\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-2}c}{\frac{1}{s-2}(1+\frac{1}{s-1}c)}\cdot\frac{b}{s+a}=\frac{\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-2}c}{\frac{1}{s-2}(1+\frac{1}{s-1}c)}\cdot\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)}\cdot\frac{b}{s+a}=\frac{s+c-2}{s+c-1}\cdot\frac{a}{s+a}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる. ここで, $a=b$ としている. よって (2) と同様に定常偏差を求めると

$$
e_s=1-\lim_{s=0}sG_{yr}(s)\frac{1}{s}=1-\lim_{s=0}\frac{s+c-2}{s+c-1}\cdot\frac{a}{s+a}\quad=1-\frac{c-2}{c-1}=\underline{\frac{1}{c-1}}\tag{6}
$$

となる.

(b)

(1) (a) の (1) と同様に考えると, $F(s)=c/(s^2+as+b)$, $P^{-1}(s)F(s)=c(s-2)/(s^2+as+b)$ より, これらが安定であるための条件は, ラウスの安定判別法

$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1 & b\\
s & a & \\
s^0 & \frac{ab}{a}=b &
\end{array}
$$

より $\underline{a>0,\ b>0}$ となる. また, 閉ループ系の特性方程式は, $\Phi(s)=s^2+(d-2)s+e$ となり, 内部安定となる条件は, ラウスの安定判別法

$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1 & e\\
s & d-2 & \\
s^0 & e &
\end{array}
$$

より, $\underline{d>2,\ e>0}$ となる.
<u>したがって条件は, $a>0,\ b>0,\ d>2,\ e>0.$</u>

(2) $r$ から $y$ への伝達関数は, $G_{yr}=F=c/(s^2+as+b)$ となる. 系が安定であるとき定常偏差は

$$
e_s=1-\lim_{s=0}\frac{c}{s^2+as+b}=1-\frac{c}{b}=0\tag{7}
$$

となればよいので, (1) の条件かつ, $\underline{b=c}$ が条件となる. <u>よって, $a>0,\ b>0,\ d>2,\ e>0,\ b=c$ である.</u>

(3) $G_{yr}=F=c/(s^2+as+b)$ より, 2 次系の式にあてはめると

$$
G_{yr}=\frac{\frac{c}{b}b}{s^2+2\frac{a}{2\sqrt{b}}\sqrt{b}s+b}\tag{8}
$$

より, $\zeta = a/2\sqrt{b}$, $\omega_n = \sqrt{b}$ となる．オーバーシュートが生じないためには, 安定かつ $\zeta \geq 1$ であるので, (1), (2) の条件かつ $\underline{a \geq 2\sqrt{b}}$ が条件となる．<u>よって, $a > 0$, $b > 0$, $d > 2$, $e > 0$, $b = c$, $a \geq 2\sqrt{b}$ である．</u>

(4) (a) の (4) と同様に $P$ を $\tilde{P}$ としたときの, $r$ から $y$ への伝達関数を求めると

$$\begin{aligned}
y &= \tilde{P}\left\{\frac{F}{P}\cdot r + K(Fr - y)\right\} \\
(1+\tilde{P}K)y &= \left\{\frac{\tilde{P}F}{P} + \tilde{P}KF\right\} r \\
y &= \frac{\tilde{P}F + \tilde{P}PKF}{P(1+\tilde{P}K)} r = \frac{\tilde{P} + \tilde{P}PK}{P(1+\tilde{P}K)} Fr \\
G_{yr} &= \frac{\tilde{P} + \tilde{P}PK}{P(1+\tilde{P}K)} F = \frac{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s-2}\cdot\frac{ds+e}{s}}{\frac{1}{s-2}\left(1 + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{ds+e}{s}\right)} \cdot \frac{c}{s^2 + as + b} \\
&= \frac{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s-2}\cdot\frac{ds+e}{s}}{\frac{1}{s-2}\left(1 + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{ds+e}{s}\right)} \cdot \frac{s(s-1)(s-2)}{s(s-1)(s-2)} \cdot \frac{c}{s^2 + as + b} \\
&= \frac{1}{s^2 + (d-1)s + e} \cdot \frac{cs^2 + c(d-2)s + ce}{s^2 + as + b} \qquad (9)
\end{aligned}$$

となる．ここで, $b = c$ として (2) と同様に定常偏差を求めると,

$$e_s = 1 - \lim_{s=0} s \cdot G_{yr}(s) \cdot \frac{1}{s} = 1 - \lim_{s=0} \frac{1}{s^2 + (d-1)s + e} \cdot \frac{bs^2 + b(d-2)s + be}{s^2 + as + b} = 1 - \frac{1}{e}\cdot\frac{be}{b} \underline{= 0} \qquad (10)$$

となる．