8 章演習問題【6】

つぎの制御対象を考える．以下の問いに答えよ．

$$P(s) = \frac{1}{s^2(T_1 s + 1)}$$

(a) ゲイン補償

$$K_P(s) = K_P$$

だけを用いても制御系を安定化できないことを説明せよ．

(b) 位相進み補償

$$K(s) = K\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

を用いて制御系を安定化するための条件を求めよ．

【解答】

(a) $P(s) = 1/\{s^2(T_1 s + 1)\}$, $K_P(s) = K_P$ より, 開ループ伝達関数は

$$L_P(s) = P(s)K_P(s) = \frac{K_P}{s^2(T_1 s + 1)} \tag{1}$$

となる．(安定化について考えるので $T_1 > 0$.)

演習問題 6[5] と同様にしてこの開ループ伝達関数のナイキスト軌跡を描く．(ここで開ループ伝達関数 $L_P(s) = 1/\{s^2(s + 1)\}$ は, 原点に 2 位の極を持つことに注意.)

$$\begin{aligned} L_P(j\omega) &= \frac{K_P}{(j\omega)^2(jT_1\omega + 1)} \\ |L_P(j\omega)| &= \frac{K_P}{\sqrt{\omega^4 + T_1^2\omega^6}} \end{aligned}$$

より, $\angle L_P(0+) = -\angle L_P((j\omega)^2) = -180^\circ$, $|L_P(0+)| = \infty$, $\angle L_P(+\infty) = -\angle L_P(T_1(j\omega)^3) = -270^\circ$, $|L_P(+\infty)| = 0$, となる．伝達関数が虚軸上に極を持つ場合のナイキスト軌跡の描き方に従い (教科書 例 6.4 参照), Fig. 1 の経路 $d \to e \to f$ に対して $s = \varepsilon e^{j\theta}$, $(\varepsilon \to 0, -90^\circ \le \theta \le 90^\circ)$ とおくと

$$\lim_{\varepsilon \to 0} L_P(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}(T_1 \varepsilon e^{j\theta} + 1)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta}$$

となる．よって, s が経路 $d \to e \to f$ を通るとき, その像は 180° から -180° へ時計方向に無限遠の半円周上をまわることになる．

したがって, ナイキスト軌跡は Fig. 2 の形となる．

Fig. 2 より, ナイキスト軌跡が点 (-1,0) のまわりを時計方向にまわる回数は 2 回なので, $N = 2$ である．この曲線の内部には開ループ極がないので $\Pi = 0$ となる．よって, $Z = 2 \neq 0$ となり, 制御系は不安定であることがわかる．ここでゲイン K_P を変えてもナイキスト軌跡が, 点 (-1,0) をまわる回数は変わらないので, 安定化することはできない．

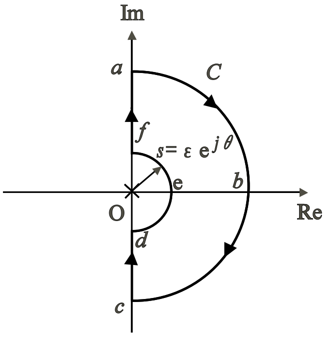

図 1: 教科書 図 6.9

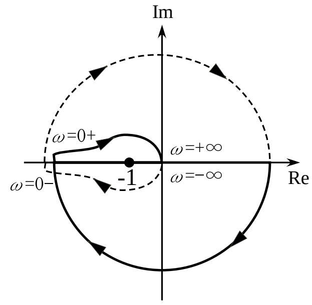

図 2: 解答図 6.2

(b) 開ループ伝達関数は $K(s) = K(Ts+1)/(\alpha Ts+1)$ より

$$L_{PL}(s) = P(s)K(s) = \frac{K(Ts+1)}{s^2(T_1s+1)(\alpha Ts+1)} \tag{2}$$

となる. 位相交差周波数 ω_{pc} は

$$\begin{aligned} L_{PL}(j\omega) &= \frac{K(1+j\omega T)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega\alpha T)} \\ &= \frac{-K(1+\omega^2 TT_1+\omega^2\alpha T(T-T_1))+j\omega K(\alpha T(1+\omega^2 TT_1)-T+T_1)}{\omega^2(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2\alpha^2T^2)} \end{aligned} \tag{3}$$

虚部 $=0$ より $\alpha T(1+\omega_{pc}^2 TT_1) = T - T_1$ から

$$\omega_{pc}^2 = \frac{(1-\alpha)T-T_1}{\alpha T^2 T_1} \tag{4}$$

となる. Fig. 3 より, ベクトル軌跡 $L(j\omega)$ が実軸と交わる (ω_{pc} が存在する) ためには

$$(1-\alpha)T > T_1 \tag{5}$$

でなければならない.

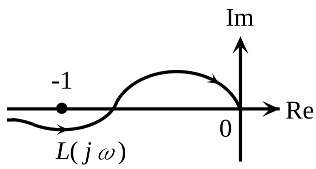

図 3: 解答図 8.4

さらに, 制御系が安定であるためには, この交点が -1 より右側になければならないので, 交点を求めると

$$\begin{aligned} L_{PL}(j\omega_{pc}) &= \frac{-K(1+\omega_{pc}^2TT_1+\omega_{pc}^2\alpha T(T-T_1))}{\omega_{pc}^2(1+\omega_{pc}^2T_1^2)(1+\omega_{pc}^2\alpha^2T^2)} \\ &= \frac{-K(1+\frac{(1-\alpha)T-T_1}{\alpha T}+\frac{(T-T_1)\{(1-\alpha)T-T_1\}}{TT_1})}{\frac{(1-\alpha)T-T_1}{\alpha T^2T_1}\left(1+\frac{\{(1-\alpha)T-T_1\}T_1}{\alpha T^2}\right)\left(1+\frac{\alpha(1-\alpha)T-\alpha T_1}{T_1}\right)} \\ &= \frac{-K\alpha T^2T_1\left(\frac{(T-T_1)(1-\alpha)(T_1+\alpha T)}{\alpha TT_1}\right)}{((1-\alpha)T-T_1)\left(\frac{(T-T_1)(T_1+\alpha T)}{\alpha T^2}\right)\left(\frac{(1-\alpha)(T_1+\alpha T)}{T_1}\right)} \\ &= \frac{-K\alpha T^3T_1}{((1-\alpha)T-T_1)(T_1+\alpha T)} \end{aligned} \tag{6}$$

となる. よって求める条件は次式となる.

$$(1-\alpha)T > T_1, \quad \frac{K\alpha T^3T_1}{((1-\alpha)T-T_1)(T_1+\alpha T)} < 1 \tag{7}$$