8 章演習問題【5】

つぎの制御対象を考える.

$$P(s) = \frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

これに対して PD 補償

$$K_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s) \tag{1}$$

を用いたとき, 制御系が安定となるゲイン K_P の範囲を求めよ. ただし, $T_1,\ T_2,\ T_D,\ > 0$, $K_P > 0$ とする.

【解答】

開ループ伝達関数は,

PD 補償

$$K_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s)$$

を用いると, 開ループ伝達関数 $L(s)$ は次のように計算できる.

$$L(s) = P(s)K_{KD}(s) = \frac{K_P(1 + T_D s)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{2}$$

またベクトル軌跡の概形は, 図 1 のようになる．よって，実軸との交点が -1 より右側にあれば安定なので, この条件からゲイン K_P を求める. 初めに, ベクトル軌跡が実軸と交わる周波数 ω_{pc} を求める.

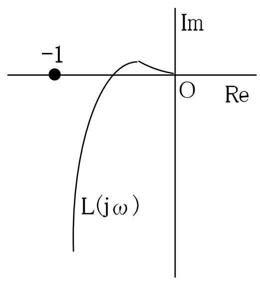

図 1: ベクトル軌跡

$$\begin{aligned}
L(j\omega) &= \frac{K_P(1 + j\omega T_D)}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} \\
&= \frac{K_P(1 + j\omega T_D)}{-\omega^2(T_1 + T_2) + j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2)} \\
&= K_P \frac{\omega^2(T_D - T_1 - T_2) - \omega^4 T_D T_1 T_2 + j\omega\{-\omega^2(T_D T_1 + T_D T_2 - T_1 T_2) - 1\}}{\omega^4(T_1 + T_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

となる．実軸と交わるとき, $L(j\omega) = (\text{実数成分}) + \underbrace{(\text{虚数成分})}_{=0}$ となることから周波数 ω_{pc} は (3) 式の虚数成分に注目すると,

$$-\omega^2(T_D T_1 + T_D T_2 - T_1 T_2) - 1 = 0 \tag{4}$$

を満たす ω となるので

$$\omega_{pc} = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2 - T_D(T_1 + T_2)}} \tag{5}$$

となる．次に，実軸との交点を求める．(5) 式を (3) 式に代入する．

$$
\begin{aligned}
L(j\omega_{pc}) &= K_P \frac{-\omega_{pc}^2(T_D - T_1 - T_2) - \omega_{pc}^4 T_D T_1 T_2}{\omega_{pc}^4 (T_1 + T_2)^2 + \omega_{pc}^2 (1 - \omega_{pc}^2 T_1 T_2)^2} \\
&= K_P \frac{(T_D - T_1 - T_2) - T_D T_1 T_2 \frac{1}{T_1T_2 - T_D(T_1+T_2)}}{\frac{(T_1+T_2)^2}{T_1T_2 - T_D(T_1+T_2)} + \left(1 - \frac{T_1T_2}{T_1T_2 - T_D(T_1T_2)}\right)^2} \\
&= K_P \frac{(T_1T_2 - T_D(T_1+T_2))\left\{(T_D - T_1 - T_2)(T_1T_2 - T_D(T_1+T_2)) - T_D T_1 T_2\right\}}{(T_1+T_2)^2 \left\{T_1T_2 - T_D(T_1+T_2) + T_D^2\right\}} \\
&= K_P \frac{(T_1T_2 - T_D(T_1+T_2))(T_1+T_2)(-T_D^2 - T_1T_2 + T_1T_D + T_2T_D)}{(T_1+T_2)^2 \left\{T_1T_2 - T_D(T_1+T_2) + T_D^2\right\}} \\
&= K_P \frac{T_D(T_1+T_2) - T_1T_2}{T_1 + T_2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

安定であるためには, 実軸との交点が -1 より大きければよい，つまり

$$
K_P \frac{T_D(T_1+T_2) - T_1T_2}{T_1 + T_2} > -1 \qquad (7)
$$

であればよい．よって, 安定のための K_p の条件は

$$
\underline{K_p < \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2 - T_D(T_1+T_2)}} \qquad (8)
$$

となる．