## 8 章演習問題【3】

(a) 開ループ伝達関数が $L(s) = \omega_n^2/(s(s+2\zeta\omega_n))$ であるとき, 位相余裕 PM は次式で与えられることを示せ.

$$\mathrm{PM} = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right)$$

(b) 上の関係式のグラフを描き

$$\mathrm{PM} \simeq 100 \times \zeta \tag{1}$$

が成り立つことを示せ.

## 【解答】

(a) まずゲイン交差周波数 $\omega_{gc}$ を求める. 開ループゲインを求めると

$$|L(j\omega)| = \left|\frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega}\right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \tag{2}$$

となる. $|L(j\omega_{gc})| = 1$ より

$$\omega_{gc}^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_{gc}^2 - \omega_n^4 = 0 \tag{3}$$

を得る. これよりゲイン交差周波数 $\omega_{gc}$ は

$$\omega_{gc} = \sqrt{-2\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2\sqrt{4\zeta^4+1}} = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2} \tag{4}$$

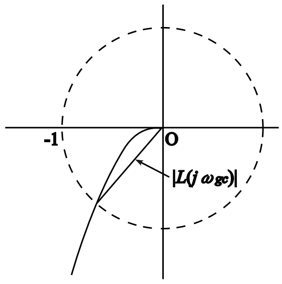

図 1: 解答図 2

と求められる. このとき位相 $\angle L(j\omega_{gc})$ は

$$\begin{aligned}
\angle L(j\omega_{gc}) &= \angle\left(\frac{\omega_n^2}{-\omega_{gc}^2 + j2\zeta\omega_n\omega_{gc}}\right) = -\angle(-\omega_{gc}^2 + j2\zeta\omega_n\omega_{gc}) \\
&= -\left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega_{gc}}{\omega_{gc}^2}\right)\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_{gc}}\right) - 180^\circ
\end{aligned}$$

ここで (4) 式より

$$\angle L(j\omega_{gc}) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right) - 180^\circ \tag{5}$$

となる. したがって, 位相余裕 PM は

$$\mathrm{PM} = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right) \tag{6}$$

で与えられる.
(b) (6) 式をグラフを Fig. 2 に示す. Fig. 2 より $\mathrm{PM} < 70°$ の範囲では $\mathrm{PM} \cong 100 \times \zeta$ となることが確認される.

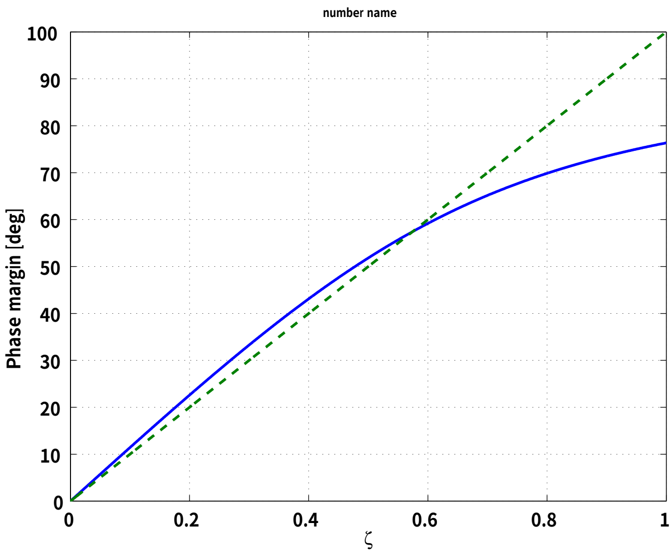


図 2: 実線: (6) 式, 破線: $\mathrm{PM} = 100 \times \zeta$