7 章演習問題【5】

ノミナルモデルが $P(s) = 1/s$, コントローラが $K = 1$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) 不確かさの重み関数が $W_2(s) = s/1.5$ のとき, $|W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \forall\omega$ のロバスト安定条件を調べよ.

(b) 制御性能の重み関数が $W_1(s) = 1/1.5s$ のとき, $|W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1, \forall\omega$ のノミナル性能条件を調べよ.

(c) 上の (a), (b) で与えられた重み関数 $W_1(s)$, $W_2(s)$ に対し, $|W_1(j\omega)S(j\omega) + W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \forall\omega$ のロバスト性能条件を調べよ.

(c) については計算でロバスト性能条件を満たすか確認し, Matlab によりそのゲイン線図も示せ.

【解答】

ロバスト安定条件は $|W_2T| < 1$ であることからすべての周波数に対して成立していることを確認する.

(a) ノミナルモデル $P(s) = 1/s$, コントローラ $K = 1$ より相補感度関数は

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{1}{s}\cdot 1}{1 + \frac{1}{s}\cdot 1} = \frac{1}{s+1}$$

であるので,

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left|\frac{j\omega}{1.5}\frac{1}{j\omega + 1}\right|$$

となる. 周波数の低いところ ($\omega \approx 0$) では

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left|\frac{0}{1.5(j\omega + 1)}\right| = 0 < 1$$

となり, 周波数の高いところ ($\omega \approx \infty$) では

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left|\frac{1}{1.5(1 + \frac{1}{j\omega})}\right| \approx \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} < 1$$

となる. よって,

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1$$

であるので, ロバスト安定である.

(b) ノミナルモデル $P(s) = 1/s$, コントローラ $K = 1$ より感度関数は

$$S(s) = \frac{1}{1 + PK} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s}\cdot 1} = \frac{s}{s+1}$$

であるので,

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| = \left|\frac{1}{1.5j\omega}\frac{j\omega}{1 + j\omega}\right| = \left|\frac{1}{1.5(j\omega + 1)}\right|$$

となる. 周波数の低いところ ($\omega \approx 0$) では,

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| < \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} < 1$$

となり, 周波数の高いところ ($\omega \approx \infty$) では

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| \approx 0 < 1$$

となる．よって

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1$$

であるので, ノミナル性能条件を満たす.

(c) (a), (b) より

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left|\frac{1}{1.5(j\omega+1)}\right| + \left|\frac{j\omega}{1.5}\frac{1}{j\omega+1}\right| = \frac{2}{3}\frac{\omega+1}{\sqrt{\omega^2+1}} \tag{1}$$

である．これを ω について微分して整理すると

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega+1}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\frac{1-\omega}{\omega^2+1}$$

となるので，(1) 式 は $\omega < 1$ で増加し, $\omega > 1$ で減少する.

よって, (1) 式 は $\omega = 1$ で最大となることがわかる．$\omega = 1$ を (1) 式 に代入すると

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$$

となるので，ロバスト性能条件を満たす．次の Fig. 1 に $|W_1S|$ を一点鎖線で, $|W_2T|$ を破線で, $|W_1S|+|W_2T|$ を実線でそれぞれ示す.

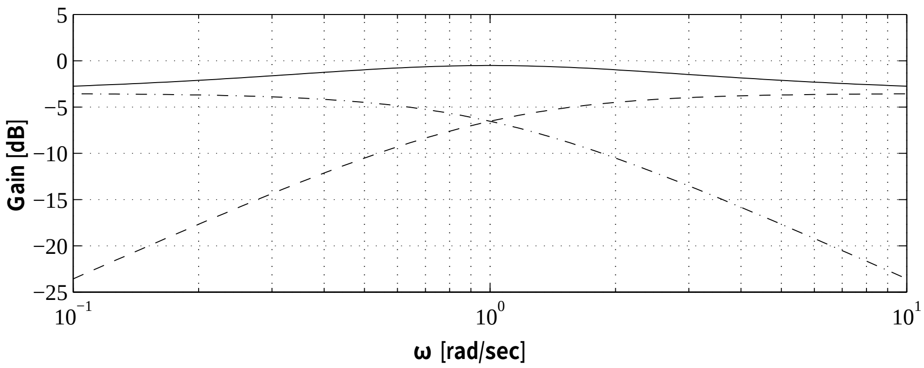

図 1: $|W_1S|$, $|W_2T|$, $|W_1S| + |W_2T|$ の周波数特性