7 章演習問題【4】

次式で与えられる $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \left\{ \tilde{P}(s) | \tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s) W_2(s)) P(s),\ |\Delta(s)| \leq 1, \quad \forall\omega \right\}$$

において，ノミナルモデルを $P(s) = \omega_n^2/(s(s + 2\zeta\omega_n))$，またコントローラを $K = 1$ とする．このとき，不確かさの重み関数がそれぞれ $W_{2A}(s) = \zeta s/(s + \omega_n)$ および $W_{2B}(s) = 5\zeta s/(s + \omega_n)$ の場合について

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)|}, \quad \forall\omega$$

のロバスト安定条件を調べよ．

【解答】

以下の解答でも示しますが，与えられた $P(s)$, K から求まる相補感度関数 $T(s)$ は，ζ の値によってピーク値が出る場合とでない場合があります．解答では，ピーク値があるかないかを判定せず考えていきます．また，付録ではピーク値が存在する場合について述べておきます．

(i) $W_{2A}(s) = \zeta s/(s + \omega_n)$ の場合

相補感度関数 $T(s)$ は，$P(s) = \omega_n^2/(s(s + 2\zeta\omega_n))$, $K = 1$ より

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1}$$

となる．Fig. 1 より相補感度関数 $T(s)$ のゲインは，ζ の値によって大きく形状が異なる．

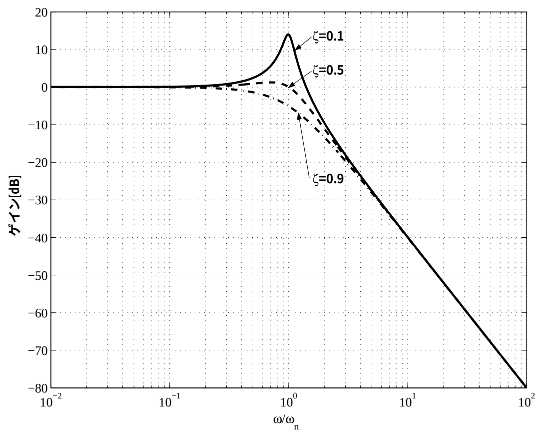

図 1: 2 次系のゲイン線図

相補感度関数 $T(s)$ のゲインは，

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + \omega_n^2 + 2j\zeta\omega_n\omega} \right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \tag{2}$$

となる．一方，不確かさの重み関数は

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left| \frac{j\omega + \omega_n}{j\zeta\omega} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_n^2}}{\zeta\omega} \tag{3}$$

となる．よって, 大きさを判断するために $|T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|}$ を求める．

$$
\begin{aligned}
|T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} - \frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{\zeta\omega} && (4)\\
&= \frac{\zeta\omega_n^2\omega - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)}}{\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} && (5)
\end{aligned}
$$

ここで, 上式において (分母) > 0 であることがわかる．また, 分子は下記の式変形のようにアンダーラインに注意すると, すべての周波数において (分子) < 0 であることがわかる．

$$
\begin{aligned}
&\zeta\omega_n^2\omega - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)}\\
=\ &\zeta\omega_n^2\omega - \sqrt{\omega^2((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)+\omega_n^2((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)}\\
=\ &\underline{\sqrt{\zeta^2\omega_n^4\omega^2}} - \sqrt{\omega^2((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)+\omega_n^2(-\omega^2+\omega_n^2)^2\underline{+4\zeta^2\omega_n^4\omega^2}} < 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

よって

$$
|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \qquad (7)
$$

が常に成立する．よってロバスト安定条件を満たす.

(ii) $\underline{W_{2B}(s) = 5\zeta s/(s+\omega_n)}$ の場合

不確かさの重み関数は,

$$
\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega+\omega_n}{5j\zeta\omega}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{5\zeta\omega} \qquad (8)
$$

となる．よって, 大きさを判断するために $|T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|}$ を求める．

$$
\begin{aligned}
|T(j\omega)| - \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} - \frac{\sqrt{\omega_n^2+\omega_n^2}}{5\zeta\omega}\\
&= \frac{5\zeta\omega\omega_n^2 - \sqrt{(\omega^2+\omega_n^2)((-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)}}{\zeta\omega\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} && (9)
\end{aligned}
$$

ここで, 上式において (分母) > 0 であることがわかる．また, 分子は下記の式変形のように, ある特定の周波数 $\omega = \omega_n$ に注意すると (分子) > 0 である周波数が存在することがわかる．

$$
\begin{aligned}
&5\zeta\omega_n^3 - \sqrt{(2\omega_n^2)(4\zeta^2\omega_n^4)}\\
=\ &5\zeta\omega_n^3 - \sqrt{8\zeta^2\omega_n^6} > 0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

よって, すべて周波数において

$$
|T(j\omega)| > \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} \qquad (11)
$$

は常には成立しない．よってロバスト安定条件を満たさない.

Fig. 2, 3 に $\zeta = 0.2$, $\omega_n = 1$ とした場合の $|T|$, $1/|W_{2A}|$, $1/|W_{2B}|$ を示す.

[付録] ピーク値が存在する場合

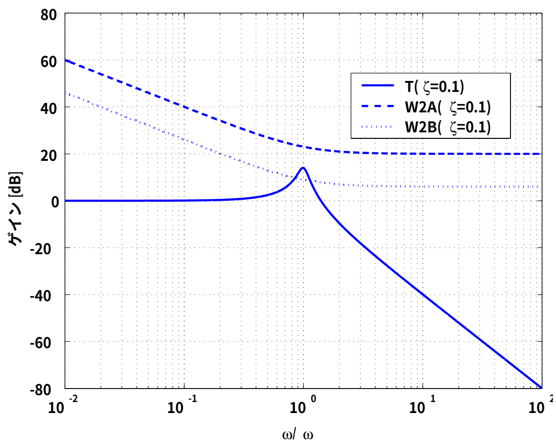

図 2: 解答図 $\zeta = 0.1$

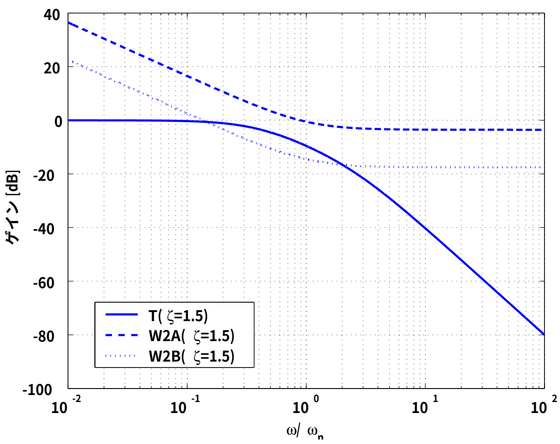

図 3: 解答図 $\zeta = 1.5$

(i) $W_{2A}(s) = \zeta s/(s+\omega_n)$ の場合

相補感度関数 $T(s)$ は, $P(s) = \omega_n^2/(s(s+2\zeta\omega_n))$, $K = 1$ より

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{12}$$

となる. Fig. 1 より $\omega = \omega_n$ のとき, 相補感度関数 $T(s)$ のゲインが最大となる.
また, その値は,

$$|T(j\omega)| = \left|\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+\omega_n^2+2j\zeta\omega_n\omega}\right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \tag{13}$$

より,

$$|T(j\omega_n)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(0)^2+4\zeta^2\omega_n^4}} = \frac{1}{2\zeta} \tag{14}$$

である. 一方, 不確かさの重み関数は

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega+\omega_n}{j\zeta\omega}\right| = \left|\frac{1+\frac{\omega_n}{j\omega}}{\zeta}\right| = \frac{1}{\zeta} \tag{15}$$

であり, 高周波域 $(\omega \approx \infty)$ で

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega+\omega_n}{j\zeta\omega}\right| \tag{16}$$

となり, $\omega \approx \omega_n$ では,

$$\frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} = \left|\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{\zeta\omega}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \tag{17}$$

となるので,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2A}(j\omega)|} \tag{18}$$

が常に成立する. よってロバスト安定条件を満たす.

(ii) $W_{2B}(s) = 5\zeta s/(s+\omega_n)$ の場合

不確かさの重み関数は, 高周波域 ($\omega \approx \infty$) で

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega + \omega_n}{5j\zeta\omega}\right| = \left|\frac{1+\frac{\omega_n}{j\omega}}{5\zeta}\right| = \frac{1}{5\zeta} \tag{19}$$

となり, $\omega \approx \omega_n$ では,

$$\frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega + \omega_n}{5j\zeta\omega}\right| = \left|\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_n^2}}{5\zeta\omega}\right| = \frac{\sqrt{2}}{5\zeta} \simeq \frac{0.283}{\zeta} \tag{20}$$

となるので,

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_{2B}(j\omega)|} \tag{21}$$

は常には成立しない. よってロバスト安定条件を満たさない.