6 章演習問題【8】
開ループ伝達関数 $L(s) = \{K(s+10)^2\}/s^3$ に対し, 系が安定となるゲイン K の範囲を求めよ.

【解答】
開ループ伝達関数 $L(s) = \{K(s+10)^2\}/s^3$ は原点に 極を持つので, 教科書の例 6.4 と同様に考える.

$$L(j\omega) = \frac{K(j\omega+10)^2}{(j\omega)^3} = \frac{-20K\omega + jK(-\omega^2+100)}{\omega^3} \tag{1}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{\sqrt{(20K\omega)^2 + (K(-\omega^2+100))^2}}{\omega^3} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

より, $\angle L(0+) = -\angle L((j\omega)^3) = -270°$, $|L(0+)| = \infty$, $\angle L(+\infty) = -\angle L(j\omega) = -90°$, $|L(+\infty)| = 0$, となる. また, 図 1(p.118) の経路 $d \to e \to f$ に対して $s = \varepsilon e^{j\theta}$, $(\varepsilon \to 0, -90° \leq \theta \leq 90°)$ とおくと

$$\lim_{\varepsilon\to 0} L(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K(\varepsilon e^{j\theta}+10)^2}{(\varepsilon e^{j\theta})^3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K(\varepsilon e^{j\theta}+10)^2}{\varepsilon^3} e^{-j3\theta} \tag{4}$$

よって, s が経路 $d \to e \to f$ を通るとき, その像は $270°$ から $-270°$ へ時計方向に無限遠の半円周上をまわることになる.

ここで, ベクトル軌跡と実軸との交点を求める. 位相交差周波数 ω_{pc} は, $\mathrm{Im}[L(j\omega)] = 0$ より

$$-\omega^2 + 100 = 0 \qquad \text{より} \qquad \omega_{pc} = 10 \tag{5}$$

と求まる. このとき,

$$L(j\omega_{pc}) = \frac{-20K\omega}{\omega^3} = -\frac{K}{5} \tag{6}$$

となる. したがって, 交点は $(-\frac{K}{5}, 0)$ となる. これより K の範囲により交差点が変化することがわかる.
i)$-\frac{K}{5} < -1$ すなわち $K > 5$ のとき
これに対応するナイキスト軌跡は図 2 となり, ナイキスト軌跡が点 (-1,0) のまわりを時計方向にまわる回数は 1 回, 反時計方向にまわる回数は 1 回なので, $N = 0$ である. この曲線の内部には開ループ極がないので $\mathit{\Pi} = 0$ となる. よって, $Z = 0$ となり, 制御系は安定となる.

ii)$-\frac{K}{5} > -1$ すなわち $K < 5$ のとき
これに対応するナイキスト軌跡は図 3 となり, ナイキスト軌跡が点 (-1,0) のまわりを時計方向にまわる回数は 2 回なので, $N = 2$ である. この曲線の内部には開ループ極がないので $\mathit{\Pi} = 0$ となる. よって, $Z = 2$ となり, 制御系は不安定となる.

<u>よって, 系が安定となるゲイン K の範囲は $K > 5$ である.</u>

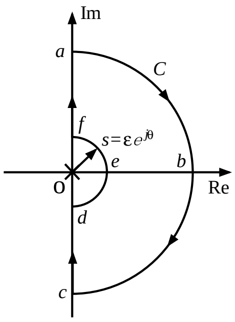

図 1:

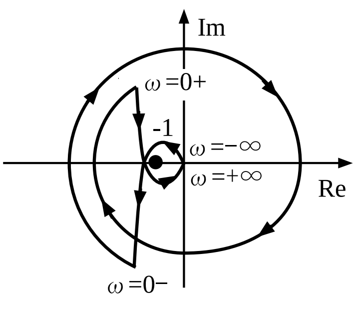

図 2: ベクトル軌跡

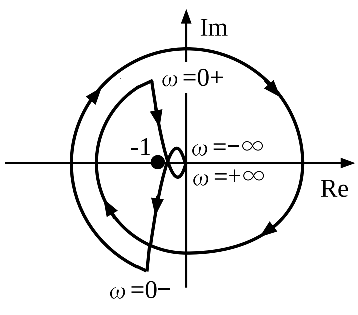

図 3: ベクトル軌跡