6 章演習問題【7】
開ループ伝達関数 $L(s) = K/\{s(s+1)(s+2)\}$ のボード線図に基づいて, 以下の問いに答えよ.

(a) $K = 1$ のときのゲイン余裕 GM, 位相余裕 PM を調べよ.

(b) 位相余裕 PM が $20°$ となるようにゲイン K を定めよ.

【解答】

i) 手計算による方法

(a)

ゲイン余裕と位相余裕を求めるために, まず位相交差周波数とゲイン交差周波数をもとめる. 周波数伝達関数とそのゲインは次のように導くことができる.

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{1}{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} = \frac{-3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2} \tag{1}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2}} \tag{2}$$

位相交差周波数 ω_{pc} はベクトル軌跡が実軸と交わるときなので, $L(j\omega)$ の虚数成分がゼロになる条件から

$$2 - \omega^2 = 0 \qquad \text{より} \qquad \omega_{pc} = \sqrt{2} \tag{3}$$

このとき,

$$|L(j\omega_{pc})| = \frac{1}{\sqrt{9\cdot 4}} = \frac{1}{6} \tag{4}$$

である. よって, ゲイン余裕は

$$\underline{\mathrm{GM} = 0 - 20\log_{10}|L(j\omega_{pc})| = 0 - 20\log_{10}\frac{1}{6} \simeq 15.6\ \mathrm{dB}} \tag{5}$$

となる. ゲイン交差周波数 ω_{gc} はベクトル軌跡の絶対値が 1 になるときの角周波数なので, $|L(j\omega)| = 1$ より

$$\begin{aligned} 9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2 &= 1 \\ \omega^6 + 5\omega^4 + 4\omega^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

を満たす ω_{gc} は

$$\omega_{gc} \simeq 1.978i, -1.978i, 1.134i, -1.134i, 0.446, -0.446 \tag{7}$$

であるが, 0 以上の実数値として考えると, $\omega_{gc} = 0.446$ である. よって, 位相余裕は次のように導くことができる.

$$\begin{aligned} \mathrm{PM} &= -\angle(-3\omega_{gc}^2 + j\omega_{gc}(2-\omega_{gc}^2)) - (-180°) \\ &= -\left(\tan^{-1}\left(\frac{0.803}{-0.597}\right) \times \frac{180°}{\pi} + 180°\right) + 180° \\ &\simeq \underline{-126.6° + 180° = 53.4°} \end{aligned} \tag{8}$$

(b)

位相余裕を PM $=20^\circ$ とするためにはゲイン交差周波数において $\angle(-3\omega_{gc}^2+j\omega_{gc}(2-\omega_{gc}))=160^\circ$ を満たす必要がある. このとき, ゲイン交差周波数は次のように導くことができる.

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(-\frac{\omega_{gc}(2-\omega_{gc}^2)}{3\omega_{gc}^2}\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}+180^\circ &= 160^\circ \\
\left(-\frac{\omega_{gc}(2-\omega_{gc}^2)}{3\omega_{gc}^2}\right) &= \tan\left(-\frac{1}{9}\pi\right) \\
\omega_{gc}^3-3\tan\left(-\frac{1}{9}\pi\right)\omega_{gc}^2-2\omega_{gc} &= 0 \qquad \text{より} \qquad \omega_{gc}\simeq 0.970
\end{aligned} \tag{9}
$$

ゲインが 0 dB となるには, $|L(j\omega)|=1$ を満たさなくてはならない. ゲインは

$$
|L(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{9\omega^4+\omega^2(2-\omega^2)^2}} \tag{10}
$$

であるので, K は以下のように求めることができる.

$$
\begin{aligned}
K &= \sqrt{9\omega_{gc}^4+\omega_{gc}^2(2-\omega_{gc}^2)^2} \\
&= \underline{\sqrt{9.0224}\simeq 3}
\end{aligned} \tag{11}
$$

ii)Matlab による方法

ボード線図は, 図 1 となるのでこれから求める.

(a) $L(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$ のボード線図 (図 1 の実線) を描き, ボード線図から
ゲイン余裕 GM≈ 15 dB, 位相余裕 PM≈ 50 °を求める.

(b) ゲイン K を大きくすることによって, ゲイン交差周波数が大きくなる. よって, ゲイン K を大きくすることによって位相余裕が変化するので, ゲイン余裕が 20° となるようにゲインを調節する. よって, $K=3$ となる.

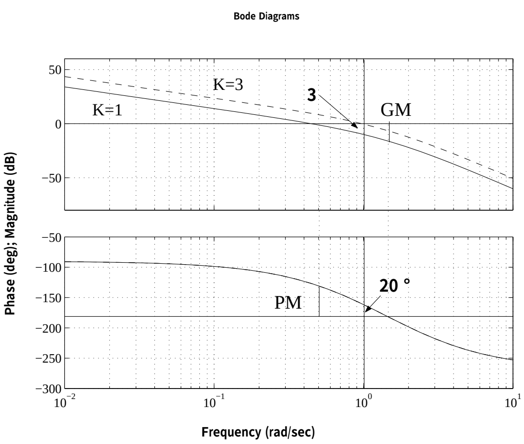

図 1: ボード線図