6 章演習問題【5】
原点に 2 位の極を持つ開ループ伝達関数 $L(s) = 1/\{s^2(s+1)\}$ が与えられるとする．このとき, フィードバック制御系の安定性を調べよ．

【解答】
[**ステップ 1**]　開ループ伝達関数 $L(s) = 1/\{s^2(s+1)\}$ は原点に 2 位の極を持つので, 教科書の例 6.4 と同様に考える．

$$L(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2(j\omega+1)} = \frac{1}{-\omega^2(1+j\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 - j\omega^3} \tag{1}$$
$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^4+\omega^6}} \tag{2}$$

より, $\angle L(0+) = -\angle L((j\omega)^2) = -180°$, $|L(0+)| = \infty$, $\angle L(+\infty) = -\angle L((j\omega)^3) = -270°$, $|L(+\infty)| = 0$, となる．また, 図 1(教科書 p.118 参照) の経路 $d \to e \to f$ に対して $s = \varepsilon e^{j\theta}$, $(\varepsilon \to 0, -90° \leq \theta \leq 90°)$ とおくと

$$\lim_{\varepsilon\to 0} L(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}(\varepsilon e^{j\theta}+1)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta} \tag{3}$$

となる．よって, s が経路 $d \to e \to f$ を通るとき, その像は $180°$ から $-180°$ へ時計方向に無限遠の半円周上をまわることになる．したがって, これに対応するナイキスト軌跡は図 2 となる．

[**ステップ 2**]
ナイキスト軌跡が点 (-1,0) のまわりを時計方向にまわる回数は 2 回なので, $N = 2$

[**ステップ 3**]
開ループ伝達関数の極は $0, -1$ より, 実部が正である極はないので $\Pi = 0$

[**ステップ 4**]
$Z = 2 + 0 = 2 \neq 0$ となり, 制御系は不安定である．
よって, フィードバック制御系は不安定である．

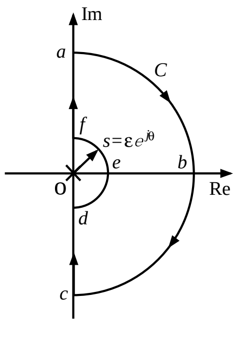

図 1: 虚軸上の極を回避し右半平面全体を囲む閉曲線 C

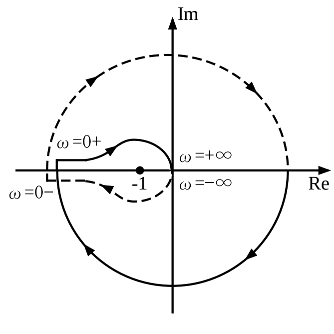

図 2: ナイキスト軌跡