6 章演習問題【4】

開ループ伝達関数 $L(s)$ が以下のように与えられるとき, ベクトル軌跡の概形を描き, フィードバック制御系が安定となるゲイン K の範囲を求めよ. ただし, $T_i > 0$, $i = 1〜3$, $K > 0$ とする.

(a) $\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$

(b) $\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

【解答】

(a) ω が $0, \infty$ のときの $L(s)$ のゲインと位相を求め, ベクトル軌跡を描く. $L(s)$ の周波数伝達関数は

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} = \frac{K}{-\omega^2(T_1 + T_2) + j\omega(1 - \omega^2 T_1T_2)} \tag{1}$$

より, ゲインは

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2(T_1 + T_2))^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1T_2)^2}} \tag{2}$$

で与えられる. よって, ω が $0, \infty$ のときの $L(s)$ のゲインは

$$|L(0)| = \infty \qquad |L(\infty)| = 0 \tag{3}$$

となる. また, 位相は $\omega \approx 0$, $\omega \approx \infty$ において

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega} \quad (\omega \approx 0), \quad L(j\omega) \approx \frac{K}{T_1T_2(j\omega)^3} \quad (\omega \approx \infty), \tag{4}$$

と近似できることから, 位相はそれぞれ

$$\angle L(0) = \angle\frac{1}{j} = -90^\circ \qquad \angle L(\infty) = \angle\frac{1}{(j)^3} = -270^\circ \tag{5}$$

となる. よって, ベクトル軌跡の概形は 図 1 のようになる.

次にゲイン K の範囲を求める. ベクトル軌跡が実軸と交わる位相交差周波数 ω_{pc} は $\mathrm{Im}[L(j\omega)] = 0$ が成立することから

$$\omega(1 - \omega^2 T_1T_2)K = 0 \quad \text{より} \quad \omega_{pc} = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} \tag{6}$$

となる. このとき $\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})]$ は

$$\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})] = \frac{K}{-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} + j\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}(1-1)} = -\frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2} \tag{7}$$

となる. 安定となるためには, この点が $(-1, 0)$ を越えなければよいので

$$-\frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2} > -1 \quad \text{つまり} \quad \underline{K < \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}} \tag{8}$$

を満たせばよい.

(b)

(a) と同様に, ω が $0, \infty$ のときの $L(s)$ のゲインと位相を求め, ベクトル軌跡を描く. $L(s)$ の周波数伝達関数は

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)(j\omega T_3 + 1)} \tag{9}$$

$$= \frac{K}{1 - \omega^2(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) + j\omega(T_1 + T_2 + T_3 - \omega^2 T_1T_2T_3)} \tag{10}$$

より, ゲインは

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1))^2+(\omega(T_1+T_2+T_3-\omega^2T_1T_2T_3))^2}} \tag{11}$$

で与えられる．よって, ω が 0, ∞ のときの $L(s)$ のゲインは

$$|L(0)| = K \qquad |L(\infty)| = 0 \tag{12}$$

となる．また, 位相は $\omega \approx 0,\ \infty$ において

$$L(j\omega) \approx K \quad (\omega \approx 0), \quad L(j\omega) \approx \frac{K}{T_1T_2T_3(j\omega)^3} \quad (\omega \approx \infty) \tag{13}$$

と近似できることから, それぞれ

$$\angle L(0) = 0^\circ \qquad \angle L(\infty) = \angle\frac{1}{(j)^3} = -270^\circ \tag{14}$$

となる．よって, ベクトル軌跡の概形は 図 2 のようになる．

次にゲイン K の範囲を求める．ベクトル軌跡が実軸と交わる位相交差周波数 ω_{pc} は $\mathrm{Im}[L(j\omega)] = 0$ が成立することから

$$\omega(T_1+T_2+T_3-\omega^2T_1T_2T_3)K = 0 \quad \text{より} \quad \omega_{pc} = \sqrt{\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}} \tag{15}$$

となる．このとき $\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})]$ は

$$\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})] = \frac{K}{1-\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)} = -\frac{KT_1T_2T_3}{(T_1+T_2+T_3)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)-T_1T_2T_3} \tag{16}$$

となる．安定となるためには, この点が $(-1, 0)$ を越えなければよいので

$$-\frac{KT_1T_2T_3}{(T_1+T_2+T_3)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)-T_1T_2T_3} > -1 \tag{17}$$

つまり,

$$\underline{K < \frac{(T_1+T_2+T_3)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)-T_1T_2T_3}{T_1T_2T_3}} \tag{18}$$

を満たせばよい．

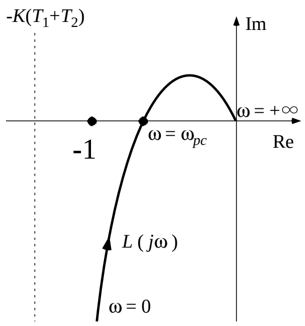

図 1: ベクトル軌跡

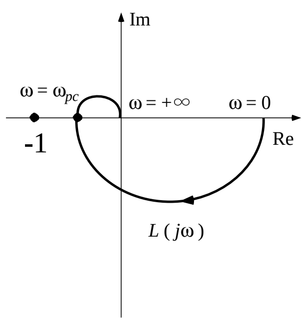

図 2: ベクトル軌跡