5 章演習問題【5】

つぎの伝達関数のボード線図の概形を描け．ただし，ゲイン線図は折れ線近似でよい．

$$(a)\frac{10s+1}{s+10} \qquad (b)\frac{s+10}{10s+1} \qquad (c)\frac{1}{s-1}$$

【解答】

(a) 周波数伝達関数は，

$$G(j\omega) = \frac{1+j10\omega}{10+j\omega} \tag{1}$$

である．

(解法 1)

ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される．

$$|G(j\omega)| = \frac{|1+j10\omega|}{|10+j\omega|} = \sqrt{\frac{1+100\omega^2}{100+\omega^2}} \tag{2}$$

$$\angle G(j\omega) = \frac{1+j10\omega}{10+j\omega} \tag{3}$$

$\omega \ll 1$, $\omega = 1$, $\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる．

$\omega \ll 1$ $\quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\frac{1+100\omega^2}{100+\omega^2}} \approx 20\log\sqrt{\frac{1}{100}} = 20\log 10^{-1} = -20$

$\angle G = \angle\frac{1+j10\omega}{10+j\omega} \approx \angle\frac{1}{10} = 0\ ^\circ$

$\omega = 1$ $\quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\frac{1+100\omega^2}{100+\omega^2}} = 20\log\sqrt{\frac{101}{101}} = 20\log 1 = 0$

$\angle G = \angle\frac{1+j10\omega}{10+j\omega} = \angle\frac{1+j10}{10+j} = \angle(1+j10) - \angle(10+j) = \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(0.1) = 84.3 - 5.7 = 78.6\ ^\circ$

$\omega \gg 1$ $\quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\frac{1+100\omega^2}{100+\omega^2}} \approx 20\log\sqrt{100} = 20\log 10 = 20$

$\angle G = \angle\frac{1+j10\omega}{10+j\omega} \approx \angle 10 = 0\ ^\circ$

よって，図 1 のようになる．

(解法 2)

伝達関数は

$$G(s) = \frac{10s+1}{s+10} = \frac{1}{10}\cdot(10s+1)\cdot\left(\frac{1}{0.1s+1}\right) \tag{4}$$

と分解できる．$G_1(s) = \frac{1}{10}$, $G_2(s) = 10s+1$, $G_3(s) = \left(\frac{1}{0.1s+1}\right)$ と定義すると，$G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ はゲイン曲線，位相曲線について次のような折点各周波数をもつことがわかる (教科書 p. 102 参照)．よって，$G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ を重ね合わせればボード線図が図 2 のようになる．

伝達関数	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	-	-	-	-
$G_2(s)$	10	0.1	0.02	0.5
$G_3(s)$	0.1	10	2	50

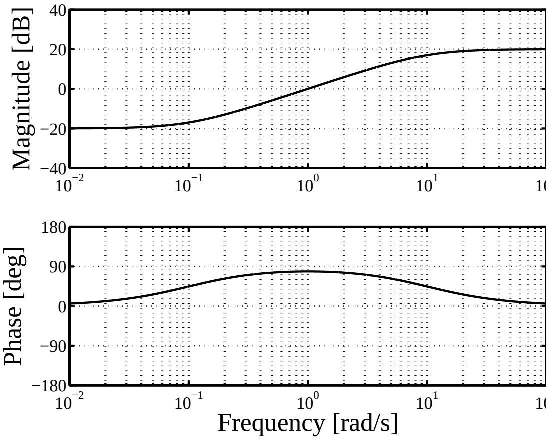

図 1: (a) のボード線図

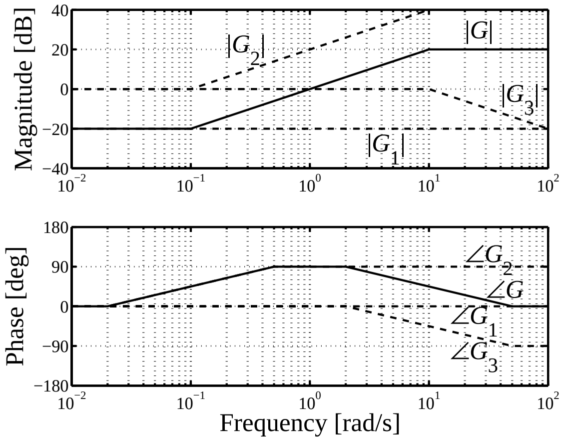

図 2: (a) のボード線図 (折れ線近似)

(b) 周波数伝達関数は,

$$G(j\omega) = \frac{10 + j\omega}{1 + j10\omega} \tag{5}$$

である.

(解法 1)

ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される.

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{|10 + j\omega|}{|1 + j10\omega|} = \sqrt{\frac{100 + \omega^2}{1 + 100\omega^2}} && (6) \\ \angle G(j\omega) &= \frac{10 + j\omega}{1 + j10\omega} && (7) \end{aligned}$$

$\omega \ll 1$, $\omega = 1$, $\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \omega \ll 1 \quad & 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{100+\omega^2}{1+100\omega^2}} \approx 20\log\sqrt{100} = 20\log 10 = 20 \\ & \angle G = \angle\tfrac{10+j\omega}{1+j10\omega} \approx \angle 10 = 0\ ^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = 1 \quad & 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{100+\omega^2}{1+100\omega^2}} = 20\log\sqrt{\tfrac{101}{101}} = 20\log 1 = 0 \\ & \angle G = \angle\tfrac{10+j\omega}{1+j10\omega} = \angle\tfrac{10+j}{1+j10} = \angle(10+j) - \angle(1+j10) = \tan^{-1}(0.1) - \tan^{-1}(10) = 5.7 - 84.3 = -78.6\ ^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \gg 1 \quad & 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{100+\omega^2}{1+100\omega^2}} \approx 20\log\sqrt{\tfrac{1}{100}} = 20\log 10^{-1} = -20 \\ & \angle G = \angle\tfrac{10+j\omega}{1+j10\omega} \approx \angle 0.1 = 0\ ^\circ \end{aligned}$$

よって, 図 3 のようになる.

(解法 2)

伝達関数は

$$G(s) = \frac{s + 10}{10s + 1} = 10 \cdot (0.1s + 1) \cdot \left(\frac{1}{10s + 1}\right) \tag{8}$$

と分解できる. $G_1(s) = 10$, $G_2(s) = 0.1s + 1$, $G_3(s) = \left(\frac{1}{10s+1}\right)$ と定義すると, $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ はゲイン曲線, 位相曲線について次のような折点各周波数をもつことがわかる (教科書 p. 102 参照). よって, $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ を重ね合わせればボード線図が図 4 のようになる.

伝達関数	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	-	-	-	-
$G_2(s)$	0.1	10	2	50
$G_3(s)$	10	0.1	0.02	0.5

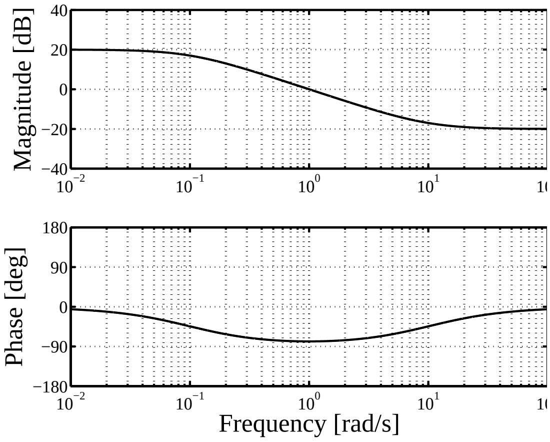

図 3: (b) のボード線図

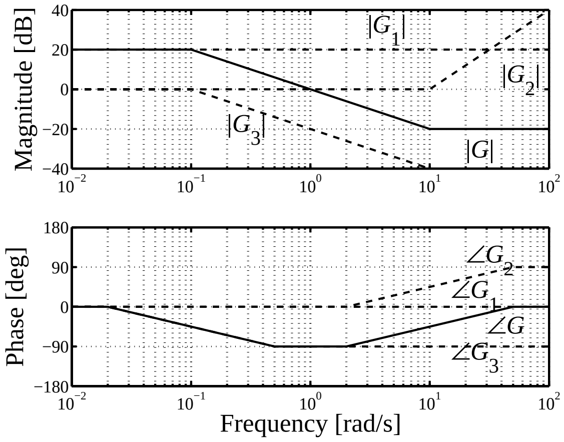

図 4: (b) のボード線図 (折れ線近似)

(c) 周波数伝達関数は,

$$G(j\omega) = \frac{1}{-1 + j\omega} \tag{9}$$

である．ゲインと位相はそれぞれつぎのように表される．

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|-1 + j\omega|} = \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}} \tag{10}$$

$$\angle G(j\omega) = \frac{1}{-1 + j\omega} \tag{11}$$

$\omega \ll 1$, $\omega = 1$, $\omega \gg 1$ の値でゲインと位相を計算するとつぎのようになる．

$$\omega \ll 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{1}{1+\omega^2}} \approx 20\log 1 = 0$$
$$\angle G = \angle\tfrac{1}{-1+j\omega} \approx \angle -1 = -180\ ^\circ$$

$$\omega = 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{1}{1+\omega^2}} = 20\log\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 20\cdot(-0.15) = -3.0$$
$$\angle G = \angle\tfrac{1}{-1+j\omega} = \angle\tfrac{1}{-1+j} = \angle 1 - \angle(-1+j) = -135\ ^\circ$$

$$\omega \gg 1 \quad 20\log|G| = 20\log\sqrt{\tfrac{1}{1+\omega^2}} \approx 20\log 0 = -\infty$$
$$\angle G = \angle\tfrac{10+j\omega}{1+j10\omega} \approx \angle\tfrac{1}{j\omega} = 1\times(-90)\ ^\circ = -90\ ^\circ$$

よって, 図 5 のようになる．ただし, 実線は折れ線近似, 点線は実際の値を描いている．

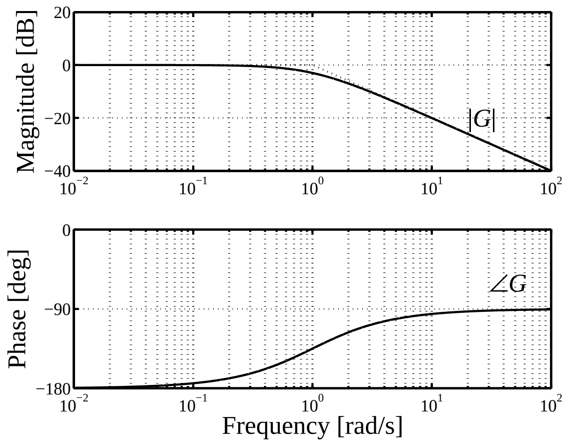
Magnitude [dB]
20
0
−20
−40
$|G|$
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}
Phase [deg]
0
−90
−180
$\angle G$
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}
Frequency [rad/s]

図 5: (c) のボード線図