5 章演習問題【4】

伝達関数 $1/\{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\}$ (ただし $T_1 > 0, T_2 > 0$) のベクトル軌跡について下記の問いに答えよ.

(1) 始点近傍 ($\omega \approx 0$) の実部を求めよ.

(2) 終点 ($\omega = \infty$) と, 終点に漸近する軌跡の角度を求めよ.

(3) ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数 ω とその交点を求めよ.

【解答】

(1)

伝達関数 $1/\{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\}$ から周波数伝達関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \\ &= \frac{1}{j\omega(1-\omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1+T_2))} \\ &= \frac{1}{-\omega^2(T_1+T_2) + j\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)} \\ &= \frac{-\omega^2(T_1+T_2) - j\omega(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^4(T_1+T_2)^2 + \omega^2(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-\omega(T_1+T_2) - j(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2 + \omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

よって, $G(j\omega)$ の実部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[G(j\omega)] &= \frac{-\omega(T_1+T_2)}{\omega^3(T_1+T_2)^2 + \omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-(T_1+T_2)}{\omega^2(T_1+T_2)^2 + (1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

であることがわかる. よって, 始点近傍 $\omega \approx 0$ の実部は

$$\underline{\mathrm{Re}[G(0)] = -(T_1+T_2)} \tag{3}$$

である.

(2)

終点 ($\omega = \infty$) のとき, すなわち ω が十分大きいとき $G(j\omega)$ は,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+jh\omega T_2)} \approx \frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^3} \tag{4}$$

と近似できる. ゲインは

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^3}\right| = \frac{1}{T_1 T_2 \omega^3} \tag{5}$$

となることから, 終点 ($\omega = \infty$) のゲインは 0, すなわち原点 (0) が終点となる.

また, この時の軌跡の角度は,

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^3} = \angle\frac{1}{j^3} = -270\ ^\circ \tag{6}$$

となり, −270 °の角度で終点に漸近していく.

(3)

ベクトル軌跡が実軸と交わるとき, $G(j\omega)$ の虚数部分は 0 となる. よって, 式 (1) より, $G(j\omega)$ の虚部

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \frac{-j(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^3 (T_1+T_2)^2 + \omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \tag{7}$$

が 0 となる条件は,

$$1-\omega^2 T_1 T_2 = 0 \tag{8}$$

であることから, ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数は

$$\underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}} \tag{9}$$

である. この ω を, 式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{-\omega(T_1+T_2) - j(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega^3 (T_1+T_2)^2 + \omega(1-\omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-(T_1+T_2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)^2 (T_1+T_2)^2} \\ &= -\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2} \end{aligned} \tag{10}$$

となることから, <u>交点は $-T_1 T_2/(T_1+T_2))$ である.</u>