4 章演習問題【5】

ステップ目標値に出力 $y(t)$ を追従させることを目的として, 図 1 のように 2 種類の制御系を構成した. このとき下記の問いに答えよ.

(1) 図 1(b) の制御系において, $A=1$ のとき, 定常位置偏差が 0 となるようにゲイン K を定めよ.

(2) 上記のとき, 図 1(a), (b) のどちらの系の過渡特性がよいか. また, A が $1 \to 1.5$ と変動したとき, それぞれの系の定常位置偏差はどうなるか.

(a) (b)

図 1: フィードバック系

【解答】

(1)

目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は,

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{1}$$

$$y(s) = (Kr(s) - y(s))\left(\frac{8A}{5s+2}\right) \tag{2}$$

から求める. (2) 式は,

$$\begin{aligned} y(s) &= (Kr(s) - y(s))\left(\frac{8A}{5s+2}\right) \\ \left(1+\frac{8A}{5s+2}\right)y &= \frac{8AK}{5s+2}r \\ y(s) &= \frac{8AK}{5s+2+8A}r(s) \end{aligned} \tag{3}$$

のように変形され, (1) 式に代入することにより,

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - y(s) \\ &= \left(1-\frac{8AK}{5s+2+8A}\right)r(s) \\ &= \frac{5s+2+8A-8AK}{5s+2+8A}r(s) \end{aligned} \tag{4}$$

が得られ, 目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は次のように表される.

$$G_{er}(s) = \frac{5s+2+8A-8AK}{5s+2+8A} \tag{5}$$

$A=1$ のとき, $G_{yr}(s)$ の分母多項式

$$5s+2+8A = 5s+10 \tag{6}$$

の根は $-2(<0)$ であることから安定であることがわかる.

次に, $A=1$, ステップ目標値 $(r(s)=\frac{1}{s})$ のとき, 定常偏差 e_s が 0 となる条件を求める.

$$\begin{aligned} e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} s \cdot G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{5s+10-8K}{5s+10} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10-8K}{10} \end{aligned} \tag{7}$$

となる．$e_s = 0$ となるには

$$10 - 8K = 0 \tag{8}$$

となればよい．よって,

$$\underline{K = \frac{5}{4}} \tag{9}$$

である．

(2)

過渡特性について調べる．

図 1(a), (b) に対し, 目標値 $r(s)$ から出力 $y(s)$ までの伝達関数 G_{yra}, G_{yrb} を求める．まず図 1(a) より,

$$\begin{aligned}
y(s) &= (r(s) - y(s))\left(\frac{5A}{s(5s+2)}\right) \\
\left(1 + \frac{5A}{s(5s+2)}\right)y(s) &= \frac{5A}{s(5s+2)}r(s) \\
(s(5s+2) + 5A)y(s) &= 5Ar(s) \\
y(s) &= \frac{5A}{s(5s+2)+5A}r(s) \\
&= \frac{5A}{5s^2+2s+5A}r(s) \qquad (10)
\end{aligned}$$

となる．いま $A = 1$ のとき,

$$y(s) = \frac{5}{5s^2+2s+5}r(s) = \frac{1}{s^2+0.4s+1}r(s) \tag{11}$$

となる．よって目標値 $r(s)$ から出力 $y(s)$ までの伝達関数 $G_{yra}(s)$ は,

$$G_{yra}(s) = \frac{1}{s^2+0.4s+1} \tag{12}$$

となる．

図 1(b) の伝達関数 $G_{yrb}(s)$ は, (3) 式と $K = \frac{5}{4}$, $A = 1$ より

$$G_{yrb}(s) = \frac{8AK}{5s+2+8A} = \frac{8 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4}}{5s+2+8 \cdot 1} = \frac{10}{5s+10} = \frac{2}{s+2} \tag{13}$$

である．

よって, (12) 式より (a) は 2 次系で, 2 次系の一般系

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{14}$$

と比較することで, 減衰係数が $\zeta = 0.2$ であることがわかる．このことから $\zeta < 1$ であり, オーバーシュートすることがわかる．一方 (b) は, (13) 式から 1 次系なのでオーバーシュートはない．よって $A = 1$, $K = 5/4$ のときには <u>(b) の方が過渡特性がよいといえる．</u>

つぎに $A = 1 \to 1.5$ となった時の, (a), (b) の定常位置偏差を考える．

(a) の場合について考える．目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は,

$$\begin{aligned}
e(s) &= r(s) - y(s) \qquad (15) \\
y(s) &= \frac{5A}{5s^2+2s+5A}r(s) \qquad (16)
\end{aligned}$$

の関係から,

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{17}$$
$$e(s) = r(s) - \frac{5A}{5s^2+2s+5A}r(s) \tag{18}$$
$$e(s) = \left(\frac{5s^2+2s}{5s^2+2s+5A}\right)r(s) \tag{19}$$

と変形され,

$$G_{er}(s) = \frac{5s^2+2s}{5s^2+2s+5A} \tag{20}$$

である. 定常位置偏差 e_{as} は

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \cdot G_{er}r(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{5s^2+2s}{5s^2+2s+5A} \cdot \frac{1}{s} = 0 \tag{21}$$

となる. よって, A が $1 \to 1.5$ に変動しても定常偏差は 0 となる. ただし, 伝達関数 $G_{er}(s)$ の安定性について調べる必要がある. (20) 式から $G_{er}(s)$ の分母多項式

$$5s^2+2s+5A \tag{22}$$

の根の実部が負となるとき安定である. この条件を満たす A の範囲は, ラウスの安定判別法, フルビッツの安定判別法により

$$A > 0 \tag{23}$$

求めることができる.

以上より, $A = 1 \to 1.5 > 0$ となっても, 定常偏差は 0 である.

(b) の場合の定常位置偏差は, (5) 式より

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{5s+2+8A-8AK}{5s+2+8A} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{2+8A-8AK}{2+8A} = -\frac{2+8A-10A}{2+8A} = -\frac{2-2A}{2+8A} = -\frac{1-A}{1+4A} \tag{24}$$

となる. よって, $A=1$ のとき定常位置偏差 $e_s = 0$ となるが, $A = 1.5$ のとき定常位置偏差

$$e_s = -\frac{1-1.5}{1+4\cdot 1.5} = -\frac{1}{14} \tag{25}$$

となり定常位置偏差が残ってしまう.

別解

(13) 式から,

$$G_{yrb}(s) = \frac{8A\frac{5}{4}}{5s+2+8A} = \frac{10A}{5s+2+8A} \tag{26}$$

なので, $A=1$ が成立しないかぎり, $G_{yrb}(0) \neq 1$ となり定常偏差が生じる.

(ラウスの安定判別法)

ラウス表を右に示す.

(a) 分母多項式の各係数が正

(b) ラウス数列がすべて正

となれば安定である.

ラウス表

s^2	5	5A
s	2	0
s^0	5A	

(a), (b) から求まる条件は

$$A > 0 \tag{27}$$

である.

(フルビッツの安定判別法)
行列 H は次式のようになる.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 5A \end{pmatrix} \tag{28}$$

ここで, 分母多項式は 2 次なので,

(a) 分母多項式の各係数が正

(b) $H_1 > 0$

となれば安定である.
(a), (b) から求まる条件は

$$A > 0 \tag{29}$$

である.
