4 章演習問題【4】

図 1 において, $r(t) = 1$(単位ステップ関数) のとき, $y(t)$ が定常偏差なく $r(t)$ に追従するために, ゲイン K_1, K_2 が満たすべき条件を求めよ.

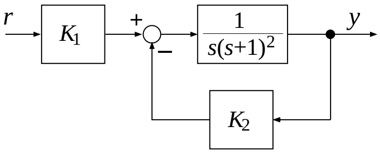

図 1: フィードバック系

【解答】

$y(t)$ が定常偏差なく $r(t)$ に追従するためには,

(i) $r(s)$ から $e(s) = r(s) - y(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ が安定

(ii) 定常偏差が 0

を満たすことが必要十分条件である.

(i) を満たす条件を $r(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ を求め, ラウス, フルビッツの安定判別法から導く. Fig. 1 と $e(s)$ の定義から

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{1}$$

$$y(s) = (K_1 r(s) - K_2 y(s)) \frac{1}{s(s+1)^2} \tag{2}$$

の関係が導ける. 式 (2) は

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{K_2}{s(s+1)^2}\right) y(s) &= \frac{K_1}{s(s+1)^2} r(s) \\ \left(s(s+1)^2 + K_2\right) y(s) &= K_1 r(s) \\ y(s) &= \frac{K_1}{s(s+1)^2 + K_2} r(s) \qquad (3)\end{aligned}$$

のように変形され, 式 (1) に代入することにより,

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - y(s) \\ &= r(s) - \frac{K_1}{s^3 + 2s^2 + s + K_2} r(s) \\ &= \frac{s^3 + 2s^2 + s + K_2 - K_1}{s^3 + 2s^2 + s + K_2} r(s) \\ \frac{e(s)}{r(s)} &= \frac{s^3 + 2s^2 + s + K_2 - K_1}{s^3 + 2s^2 + s + K_2} \qquad (4)\end{aligned}$$

が得られ, $r(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は次のように表される.

$$G_{er} = \frac{s^3 + 2s^2 + s + K_2 - K_1}{s^3 + 2s^2 + s + K_2} \tag{5}$$

$G_{er}(s)$ が安定となるには, 分母多項式

$$s^3 + 2s^2 + s + K_2 \tag{6}$$

の根の実部が負となるときである. この条件を満たす K の範囲は, ラウスの安定判別法, フルビッツの安定判別法により

$$\underline{0 < K_2 < 2} \tag{7}$$

と求めることができる.

次に, (ii) が成立するための条件を導く. 定常偏差 e_s は, $r(s) = \mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ より

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{s\to 0} s \cdot G_{er} r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^3+2s^2+s+K_2-K_1}{s^3+2s^2+s+K_2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{K_2-K_1}{K_2} \end{aligned} \tag{8}$$

となる. よって, $e_s = 0$ となる条件は,

$$\underline{K_1 = K_2} \tag{9}$$

である.

ゆえに, i), ii) から導かれる条件式 (7), (9) よりゲイン K_1, K_2 が満たすべき条件は次のように導くことができる.

$$\underline{0 < K_2 < 2,\ K_1 = K_2} \tag{10}$$

(ラウスの安定判別法)

ラウス表を右に示す.

(a) 分母多項式の各係数が正

(b) ラウス数列がすべて正

となれば安定である.

ラウス表

s^3	1	1
s^2	2	K_2
s	$\frac{2\times 1-1\times K_2}{3} = \frac{2-K_2}{2}$	0
s^0	K_2	

(a) から求まる条件は

$$K_2 > 0 \tag{11}$$

である. また, (b) から求まる条件は

$$2 - K_2 > 0 \tag{12}$$

である. 以上より $G_{yr}(s)$ が安定である K の範囲は,

$$0 < K_2 < 2 \tag{13}$$

である.

(フルビッツの安定判別法)

行列 H は次式のようになる.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & K_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & K_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

ここで, 分母多項式は 3 次なので,

(a) 分母多項式の各係数が正

(b) $H_2 > 0$

となれば安定である.

(a) から求まる条件は

$$K_2 > 0 \tag{15}$$

である. また, (b) から求まる条件は

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & K_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - K_2 > 0 \tag{16}$$

である. 以上より $G_{yr}(s)$ が安定である K の範囲は,

$$0 < K_2 < 2 \tag{17}$$

である.