4 章演習問題【2】

図 1 のフィードバック系において

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}, \quad K(s) = \frac{2}{s} \tag{1}$$

とする．このとき, まず $d(t) = 0$ として, 目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差と定常速度偏差を計算せよ．つぎに $r(t) = 0$ として, ステップ外乱 $d(t) = 1$ およびランプ外乱 $d(t) = t$ を加えたときの $y(t)$ の定常値を計算せよ．

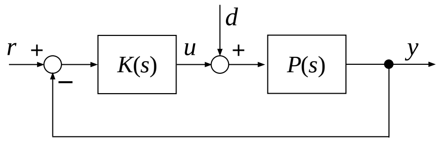

図 1: フィードバック系

【解答】

$d(t) = 0$ として目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差を求める．偏差 $e(s)$ を

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{2}$$

とし, 偏差 $e(s)$ と $y(s)$ の関係

$$y(s) = P(s)K(s)e(s) \tag{3}$$

から, 目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - P(s)K(s)e(s) \\ (1+P(s)K(s))e(s) &= r(s) \\ \frac{e(s)}{r(s)} &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} \end{aligned} \tag{4}$$

よって, 伝達関数 $G_{er}(s)$ は

$$\begin{aligned} G_{er}(s) &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{(s+2)(s+1)}\frac{2}{s}} \\ &= \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+2} \end{aligned} \tag{5}$$

である．

定常位置偏差 e_{s1} は, 最終値の定理を用いることにより

$$\begin{aligned} e_{s1} &= \lim_{t\to\infty} G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \underline{0} \end{aligned} \tag{6}$$

となる．定常速度偏差 e_{s2} も最終値の定理を用いることにより

$$
\begin{aligned}
e_{s2} = \; &= \lim_{t\to\infty} G_{er}(s)r(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\cdot G_{er}(s)r(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s^2+3s+2}{s^3+3s^2+2s+2} \\
&= \underline{1}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる．

つぎに, $r(t)=0$ として, ステップ外乱 $d(t)=1$ およびランプ外乱 $d(t)=t$ を加えたときの $y(t)$ の定常値を求める．ステップ外乱 $d(t)=1$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数 G_{yd} は

$$
\begin{cases}
u(s) = -K(s)y(s) \\
y(s) = P(s)(d(s)+u(s))
\end{cases}
\tag{8}
$$

の関係から以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
y(s) &= P(s)d(s) - P(s)K(s)y(s) \\
(1+P(s)K(s))y(s) &= P(s)d(s) \\
y(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}\cdot d(s)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

よって, 外乱 $d(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ は,

$$
\begin{aligned}
G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} \\
&= \frac{s}{s^3+3s^2+2s+2}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

と求められる．よって, ステップ外乱 $d(t)=1$ に対する定常値は,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s\to 0} s\cdot G_{yd}(s)d(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s^3+3s^2+s+2}\cdot\frac{1}{s} \\
&= \underline{0}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる．

ランプ外乱 $d(t)=t$ に対する定常値は,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s\to 0} s\cdot G_{yd}(s)d(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s^3+3s^2+s+2}\cdot\frac{1}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^3+3s^2+s+2} \\
&= \underline{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる．