4 章演習問題【1】

図 1 において $r(t) = 0$, $d(t) = 1$ (単位ステップ関数) として, つぎの問いに答えよ.

(1) $K = 1, 2, 3, 4$ としたときの, 出力 $y(t)$ の定常値を計算し, ゲイン K が大きくなれば外乱の影響が小さくなることを確認せよ.

(2) 外乱の影響をもっと少なくするため $K = 10$ としたが, $y(t)$ の定常値はかえって大きくなった. これはなぜか.

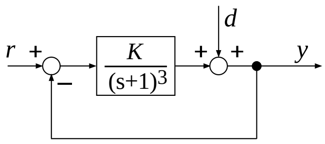

図 1: フィードバック系

【解答】

(1)

$r(t) = 0$, $d(t) = 1$ よりシステムへの入力は $d(t)$ である. はじめに, 外乱 $d(s)$ から出力 $y(s)$ までの伝達関数を求める. 図 2 のように e を用いることにより得られる関係式は

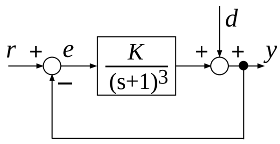

図 2: フィードバック系

$$\begin{cases} e(s) = r(s) - y(s) \\ y(s) = d(s) + \frac{K}{(s+1)^3} e(s) \end{cases} \tag{1}$$

である. $r(s) = 0$ を用いてこれをまとめる.

$$\begin{aligned} y &= d + \frac{K}{(s+1)^3}(-y) \\ \left(1 + \frac{K}{(s+1)^3}\right) y &= d \\ ((s+1)^3 + K) y &= (s+1)^3 d \\ \frac{y}{d} &= \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3 + K} \end{aligned}$$

よって, 外乱 $d(s)$ から出力 $y(s)$ までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ は

$$G_{yd}(s) = \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3 + K} \tag{2}$$

となる.

つぎに出力 $y(t)$ の定常値 y_s を求める. 伝達関数 $G_{yd}(s)$ が安定であるとき, 最終値の定理を用いることにより y_s は次のように表される.

$$y_s = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s y(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3 + K} d(s) \tag{3}$$

$d(s) = \frac{1}{s}$(単位ステップ関数) であるから

$$y_s = \lim_{s\to 0} s \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3 + K} \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3 + K} = \frac{1}{1+K} \tag{4}$$

となる．ゆえに出力 $y(t)$ の定常値 y_s は

$$\underline{K=1 \text{ のとき } y_s = \frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\underline{K=2 \text{ のとき } y_s = \frac{1}{3}} \tag{6}$$

$$\underline{K=3 \text{ のとき } y_s = \frac{1}{4}} \tag{7}$$

$$\underline{K=4 \text{ のとき } y_s = \frac{1}{5}} \tag{8}$$

である．

このように出力 $y(t)$ の定常値は (4) 式で表され, ゲイン K が大きくなると出力 $y(t)$ の定常値は小さくなっていくことがわかる．

(2)

ゲイン K の値によって, 系が不安定になった可能性があるため, $G_{yd}(s)$ が安定である K の範囲を調べる．$G_{yd}(s)$ の分母多項式は,

$$(s+1)^3 + K = s^3 + 3s^2 + 3s + K + 1 = 0 \tag{9}$$

である．$G_{yd}(s)$ が安定となるには, 分母多項式の根の実部が負となるときである．この条件を満たす K の範囲は, ラウスの安定判別法, フルビッツの安定判別法により

$$-1 < K < 8 \tag{10}$$

と求めることができる．よって, 問題では $K = 10$ としたため $\underline{G_{yd}(s) \text{ が不安定になり}, y(t) \text{ が発散した．}}$

(ラウスの安定判別法)

ラウス表を右に示す．

(a) 分母多項式の各係数が正

(b) ラウス数列がすべて正

となれば安定である．

ラウス表

s^3	1	3
s^2	3	K+1
s	$\frac{3\times3-(K+1)}{3} = \frac{8-K}{3}$	0
s^0	$K+1$	

(a) から求まる条件は

$$K + 1 > 0 \tag{11}$$

である．また, (b) から求まる条件は

$$8 - K > 0 \tag{12}$$

である．以上より $G_{yd}(s)$ が安定である K の範囲は,

$$-1 < K < 8 \tag{13}$$

である．

(フルビッツの安定判別法)

行列 H は次式のようになる．

$$H = \begin{pmatrix} 3 & K+1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & K+1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

ここで, 分母多項式は 3 次なので,

(a) 分母多項式の各係数が正

(b) $H_2 > 0$

となれば安定である.
(a) から求まる条件は

$$K + 1 > 0 \tag{15}$$

である. また, (b) から求まる条件は

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & K+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (K+1) = 8 - K > 0 \tag{16}$$

である. 以上より $G_{yd}(s)$ が安定である K の範囲は,

$$-1 < K < 8 \tag{17}$$

である.