3 章演習問題【12】

$s^3+5s^2+9s+(K+5)=0$ の根の実部が -1 以下 ($\mathrm{Re}[s] \le -1$) となる K の範囲を求めよ.

【解答】

ヒントにあるように, 新たな変数 $s' := s+1$ として, s' の多項式に変形する.

$$\begin{aligned} s^3+5s^2+9s+(K+5) &= (s'-1)^3+5(s'-1)^2+9(s'-1)+K+5 \\ &= {s'}^3+2{s'}^2+2s'+K \end{aligned}$$

s の方程式とき, 根の実部が -1 以下 ($\mathrm{Re}[s] \le -1$) となる K を求めるのが問題であった. 新たな変数 s' では, 根の実部が 0 以下 ($\mathrm{Re}[s] \le 0$) となる K を求めることになる. そこで, s' の方程式にラウスの安定判別法を適用する.

まず, 条件 R の (ii) から $K>0$ である必要がある. 次にラウス表を作成する.

ラウス表 [12]

s^3	1	2	0
s^2	2	K	0
s^1	$\frac{4-K}{2} = \frac{2\times 2-1\times K}{2}$	0	
s^0	$K = \frac{(4-K)/2\times K-2\times 0}{(4-K)/2}$	0	

ラウス数列をすべて正とするには, 次の式を満たす必要がある.

$$\frac{4-K}{2} > 0 \quad K > 0$$

ここで, s' の方程式での安定判別法では根の実部には 0 を含んでいないが, 問題では実部が -1 以下 (s' では実部が 0 以下) となっているので, この場合は根の実部に 0 を含める.

以上から, $s^3+5s^2+9s+(K+5)=0$ の根の実部が -1 以下 ($\mathrm{Re}[s] \le -1$) となる K の範囲は

$$0 \le K \le 4$$

となる.