

3章演習問題【11】

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき、システムが安定となる K の範囲を求めよ。

(a) $s^3 + 3s^2 + 2s + K$

(b) $s^4 + s^3 + 2s^2 + (K - 2)s + (4 - K)$

【解答】

(a) $s^3 + 3s^2 + 2s + K$

(1) ラウスの安定判別法による解法

条件 R の (ii) を満たすために $K > 0$ である必要がある。次に、ラウス表を作成する。ラウス数列をすべて正とするため次式を満たす必要がある。

$$\frac{6-K}{3} > 0 \quad K > 0$$

以上から、システムが安定となるための K の範囲は

$$0 < K < 6$$

となる。

(2) フルビッツの安定判別法による解法

まず、条件 H の (ii) を満たすために $K > 0$ である必要がある。次に、行列 H を作成する。

$$H = \begin{pmatrix} 3 & K & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & K \end{pmatrix}$$

小行列は

$$H_1 = 3, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 3 & K \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - K, \quad H_3 = \begin{vmatrix} 3 & K & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & K \end{vmatrix} = 6K - K^2$$

となる。これより $H_1 \sim H_3$ がすべて正になるには

$$6 - K > 0, \quad 6K - K^2 > 0$$

以上から、システムが安定となるための K の範囲は

$$0 < K < 6$$

となる。

注意

単純化したフルビッツの安定判別法より、条件 H の (ii) を満たすもとで、 H_2 が正であればよい。よって、

$$K > 0$$

$$H_2 = 6 - K > 0$$

の条件から求めてもよい。

s^3	1	2	0
s^2	3	K	0
s	$\frac{6-K}{3}$	0	
s^0	$K = \frac{(6-k)/3 \times K - 3 \times 0}{(6-k)/3}$	0	

$$(b) s^4 + s^3 + 2s^2 + (K - 2)s + (4 - K)$$

(1) ラウスの安定判別法による解法

条件 R の (ii) を満たすためには $K - 2 > 0$, $4 - K > 0$ である必要がある. 次にラウス表を作成する.

ラウス表 [11](b)

s^4	1	2	$4 - K$
s^3	1	$K - 2$	0
s^2	$4 - K = \frac{1 \times 2 - 1 \times (K - 2)}{1}$	$4 - K = \frac{1 \times (4 - K) - 1 \times 0}{1}$	0
s^1	$K - 3 = \frac{(4 - K) \times (K - 2) - 1 \times (4 - K)}{4 - K}$	0	0
s^0	$4 - K = \frac{(K - 3) \times (4 - K) - (4 - K) \times 0}{K - 3}$	0	0

ラウス数列がすべて正であるためには

$$4 - K > 0 \quad K - 3 > 0$$

を満たす必要がある.

以上から, システムが安定となるための K の範囲は

$$K - 2 > 0, \quad 4 - K > 0, \quad 3 < K < 4$$

を満たす範囲となる. よって,

$$3 < K < 4$$

となる.

(2) フルビッツの安定判別法による解法

ここでは, 簡単化したフルビッツの安定判別法を用いる. まず, 条件 H の (ii) を満たすために $K - 2 > 0$, $4 - K > 0$ である必要がある. 次に, 行列 H を作成する.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & K - 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 - K & 0 \\ 0 & 1 & K - 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 - K \end{pmatrix}$$

小行列

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} 1 & K - 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 - K \\ 0 & 1 & K - 2 \end{vmatrix} = 2(K - 2) - ((4 - K) + (K - 2)^2) \\ &= -K^2 + 7K - 12 > 0 \end{aligned}$$

であればよい. よって,

$$-K^2 + 7K - 12 > 0 \Rightarrow K^2 - 7K + 12 < 0 \Rightarrow (K - 4)(K - 3) < 0$$

から

$$3 < K < 4$$

である。以上から、システムが安定となるための K の範囲は

$$K - 2 > 0, \quad 4 - K > 0, \quad 3 < K < 4$$

を満たす範囲となる。よって、

$$\underline{3 < K < 4}$$

となる。