3 章演習問題【8】

微分方程式

$$\ddot{\theta}(t) = u(t) \tag{1}$$

で記述される回転体に対して

$$u(t) = K_p(r(t) - \theta(t)) - K_v\dot{\theta}(t), \qquad K_v \geq 0, K_p \geq 0 \tag{2}$$

なるフィードバック制御系を構成したとする (図 1). ここで, $\theta(t)$, $u(t)$, $r(t)$ は, それぞれ回転体の角度, 入力トルク, および角度の目標値信号である. また, K_p, K_v は角度偏差と角速度のフィードバックゲインである. このとき, 下記の問いに答えよ.

(1) $K_p = 1$ として, K_v を 0 から徐々に大きくしていった. ステップ応答はどのように変化するか. また, ステップ応答が振動的でなくなるためには K_v をどのように選ぶべきか.

(2) 逆に $K_v = 1$ と固定して, K_p を 0 から徐々に大きくしていった. ステップ応答はどのように変化するか. また, ステップ応答が振動的でなくなるためには K_p をどのように選ぶべきか.

(3) $K_p = 1$, $K_v = 1.6$ とした場合と比較し, ステップ応答の速度を 2 倍の速さにしたい. K_p, K_v をどのように選べばよいか.

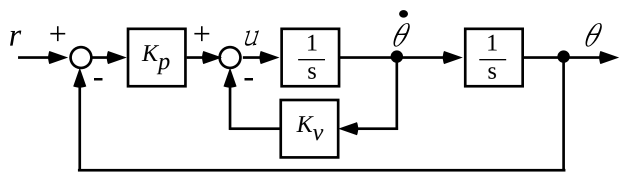

図 1: フィードバック制御系

【解答】

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) &= u(t) \qquad (3) \\ u(t) &= K_p(r(t) - \theta(t)) - K_v\dot{\theta}(t) \qquad (4) \end{aligned}$$

$u(t)$ を消去し, $r(t)$ と $\theta(t)$ のみの関数にして, 目標値から出力への伝達関数を求める.

$$\ddot{\theta}(t) = K_p(r(t) - \theta(t)) - K_v\dot{\theta}(t) \tag{5}$$

(5) 式をラプラス変換する. $\theta(0) = 0$ とすれば

$$\theta(s)s^2 = K_p(r(s) - \theta(s)) - K_v\theta(s)s \tag{6}$$

となり,

$$\theta(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_v s + K_p} r(s) \tag{7}$$

が導かれる.

(1)　システムは, $2\zeta\omega_n = K_v$, $\omega_n^2 = K_p$ の 2 次系であることが分かる. また, $K_p = 1$ より, $\omega_n^2 = 1$ となる. K_v を 徐々に大きくしていくと, 減衰係数 ζ が大きくなっていき, 最初振動的である応答が次第に振動的でなくなる (教科書 図 3.7). 振動が全くなくなるのは $\zeta \geq 1$, つまり $\underline{K_v \geq 2}$ のときである.

(2) $K_v = 1$ と固定するので, $K_v = 2\zeta\omega_n = 1$ となる．この時 K_p を徐々に大きくしていくことは, ω_n を大きく, ζ を小さくすることに相当する．よって, (1) とは逆に, K_p を大きくしていくと, 徐々に振動的なふるまいになる. 振動が全くなくなるのは $\zeta \geq 1$ の時であり, $K_v = 2\zeta\omega_n = 1$ より $\omega_n \leq 0.5$ となるので, $K_p = \omega_n^2 \leq 0.25$ である.

(3) $K_p = 1$, $K_v = 1.6$ とすると, $\zeta = 0.8$, $\omega_n = 1$ が求まる． ω_n を大きくすれば応答は速くなる. ステップ応答の速度のみを 2 倍にしたいので, ζ は変化させずに ω_n を 2 倍にすると, $\omega_n = 2$ となり, $K_p = \omega_n^2 = 4$, $K_v = 2\zeta\omega_n = 3.2$ である.