**3 章演習問題【7】**
つぎの伝達関数をもつ系のステップ応答を計算せよ.

(a) $\dfrac{1}{(2s+1)^2}$ (b) $\dfrac{1}{(2s+1)^3}$

(c) $\dfrac{2s+10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ (d) $\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

**【解答】**
ステップ応答を $y(t)$ とおき，そのラプラス変換を $y(s)$ とおく.

**(a)**
伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)^2} \tag{1}$$

で与えられ, 部分分数展開を用いると $y(s)$ は

$$y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{(2s+1)^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{(2s+1)^2} \tag{2}$$

で与えられる. よって, ステップ応答は

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] = 1 - e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2} \tag{3}$$

となる.
**(補足)** ここで用いた部分分数展開は次のように求めた. $a,\ b,\ c$ を定数として

$$\frac{1}{s(2s+1)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b}{2s+1} + \frac{c}{(2s+1)^2}$$

とおく.

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{a}{s} + \frac{b}{2s+1} + \frac{c}{(2s+1)^2} \\
&= \frac{a(2s+1)^2 + bs(2s+1) + cs}{s(2s+1)^2} \\
&= \frac{(4a+2b)s^2 + (4a+b+c)s + a}{s(2s+1)^2}
\end{aligned}$$

分子を比較すると

$$1 = (4a+2b)s^2 + (4a+b+c)s + a$$

となる. 恒等式であるので

$$\begin{cases} 4a+2b=0 \\ 4a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

であることから, $a=1,\ b=-2,\ c=-2$ である.

**(b)** 伝達関数は

$$G(s)=\frac{1}{(2s+1)^3} \tag{4}$$

で与えられ, 部分分数展開を用いて展開すると $y(s)$ は次式のようになる.

$$\begin{aligned} y(s)=G(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{(2s+1)^3}\frac{1}{s} &= \frac{1}{s}-\frac{2}{2s+1}-\frac{2}{(2s+1)^2}-\frac{2}{(2s+1)^3} && (5)\\ &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/2}-\frac{1/2}{(s+1/2)^2}-\frac{1/4}{(s+1/2)^3} && (6)\end{aligned}$$

よって, ステップ応答は

$$\begin{aligned} y(t)=\mathcal{L}^{-1}[y(s)] &= 1-e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}\frac{t^{(2-1)}}{(2-1)!}e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{4}\frac{t^{(3-1)}}{(3-1)!}e^{-\frac{1}{2}t} && (7)\\ &= \underline{1-e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{t}{2}e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{t^2}{8}e^{-\frac{1}{2}t}} && (8)\end{aligned}$$

となる.

**(補足)** ここで用いた部分分数展開は次のように求めた. $a,\ b,\ c,\ d$ を定数として

$$\frac{1}{s(2s+1)^2}=\frac{a}{s}+\frac{b}{2s+1}+\frac{c}{(2s+1)^2}+\frac{d}{(2s+1)^3}$$

とおく. 右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{a}{s}+\frac{b}{2s+1}+\frac{c}{(2s+1)^2}+\frac{d}{(2s+1)^3}\\ &= \frac{a(2s+1)^3+bs(2s+1)^2+cs(2s+1)+ds}{s(2s+1)^3}\\ &= \frac{(8a+4b)s^3+(12a+4b+2c)s^2+(6a+b+c+d)s+a}{s(2s+1)^3}\end{aligned}$$

と変形されることから, 左辺と分子を比較すると

$$1=(8a+4b)s^3+(12a+4b+2c)s^2+(6a+b+c+d)s+a$$

となる. 恒等式であるので

$$\begin{cases} 8a+4b=0\\ 12a+4b+2c=0\\ 6a+b+c+d=0\\ a=1\end{cases}$$

であることから, $a=1,\ b=-2,\ c=-2,\ d=-2$ である.

**(c)**
伝達関数は

$$G(s)=\frac{2s+10}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{9}$$

で与えられ, $y(s)$ は

$$y(s)=G(s)\frac{1}{s}=\frac{2s+10}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{10}$$

となる．ここで, 部分分数展開を用いて変形すると

$$y(s) = \frac{5}{3}\frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s+3} \tag{11}$$

となる．よって, ステップ応答は

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] = \frac{5}{3} - 4e^{-t} + 3e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \tag{12}$$

となる．

**(補足)** ここで用いた部分分数展開は次のように求めた．$a,\ b,\ c,\ d$ を定数として

$$\frac{2s+10}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2} + \frac{d}{s+3}$$

とおく．

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2} + \frac{d}{s+3} \\ &= \frac{a(s+1)(s+2)(s+3) + bs(s+2)(s+3) + cs(s+1)(s+3) + ds(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{(a+b+c+d)s^3 + (6a+5b+4c+3d)s^2 + (11a+6b+4c+2d)s + 6a}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\end{aligned}$$

分子を比較すると

$$2s + 10 = (a+b+c+d)s^3 + (6a+5b+4c+3d)s^2 + (11a+6b+4c+2d)s + 6a$$

となる．恒等式であるので

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ 6a+5b+4c+3d = 0 \\ 11a+6b+3c+2d = 2 \\ 6a = 10 \end{cases}$$

であることから, $a = \frac{5}{3},\ b = -4,\ c = 3,\ d = -\frac{2}{3}$ である．

**(d)**

伝達関数は

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)} \tag{13}$$

で与えられ, 部分分数展開を用いて展開すると $y(s)$ は次式のようになる．

$$y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{s}{s^2+2s+2} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} \tag{15}$$

よって, ステップ応答は

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] = 1 - 2e^{-t} + e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \tag{16}$$

$$= \underline{1 - 2e^{-t} + e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))} \tag{17}$$

となる.

**(補足)** ここで用いた部分分数展開は次のように求めた. $a,\ b,\ c,\ d$ を定数として

$$\frac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{cs+d}{s^2+2s+2}$$

とおく. 右辺は

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{cs+d}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{a(s+1)(s^2+2s+2)}{s} + \frac{bs(s^2+2s+2)}{s+1} + \frac{(cs+d)s(s+1)}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{(a+b+c)s^3+(3a+2b+c+d)s^2+(4a+2b+d)s+2a}{s(s+1)(s^2+2s+2)}\end{aligned}$$

と変形されることから, 左辺と分子を比較すると

$$2 = (a+b+c)s^3+(3a+2b+c+d)s^2+(4a+2b+d)s+2a$$

となる. 恒等式であるので

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c+d=0 \\ 4a+2b+d=0 \\ 2a=2 \end{cases}$$

であることから, $a=1,\ b=-2,\ c=1,\ d=0$ である.