3 章演習問題【6】

式 (3.32), 式 (3.33) を確認せよ.

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right\} \tag{3.32}$$

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left((\zeta+\beta)e^{\omega_n \beta t} - (\zeta-\beta)e^{-\omega_n\beta t}\right)\right\} \tag{3.33}$$

【解答】

(3.32) の導出 ($\zeta = 1$)

2 次系の伝達関数は,

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1}$$

と表せるので, ステップ応答は次のようになる.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)u(s)\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s+\omega_n} - \frac{K\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right] \qquad (\text{部分分数展開をおこなう}) \\
&= K\left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right) \qquad (2) \\
&\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = te^{-at} \text{ を適用}\right)
\end{aligned}$$

よって, ステップ応答 (3.32) 式は

$$y(t) = K\left[1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)\right] \tag{3}$$

のように導出される.

(3.33) の導出 ($\zeta > 1$)

ステップ応答は, 次のように導出される.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)u(s)\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K\left(s + 2\zeta\omega_n\right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right] \qquad (\text{部分分数展開をおこなう}) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K\left(s+\zeta\omega_n\right) + K\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 - \left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n\right)^2}\right] \\
&\left(\zeta > 1 \text{ のため}, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\sin\omega t, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos\omega t \text{ が適用できない}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K\left(s+\zeta\omega_n\right) + K\zeta\omega_n}{\left(s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n\right)\left(s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n\right)}\right] \qquad (\text{第 2 項を因数分解により式整理})
\end{aligned}$$

$$(4)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K\left(s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n\right)+K\zeta\omega_n-K\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n}{\left(s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n\right)\left(s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n\right)}\right] \quad (s \text{ の項を分母にあわせて分離})$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n} - \frac{K\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{\left(s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n\right)\left(s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n\right)}\right]$$

(第 2 項の分子の第 1 項と第 2 項を分離)

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n} - \frac{K\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{1}{s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n} - \frac{1}{s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n}\right)\right]$$

(第 2 項と第 3 項の 1 つめをまとめる)

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - K\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n} + K\frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n}\right] \tag{5}$$

ここで, $\beta = \sqrt{\zeta^2-1}$ として, 逆ラプラス変換

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$$

を用いると, 次のように (3.33) 式が導出できる.

$$\begin{aligned} y(t) &= K\left(1 - \frac{\zeta+\beta}{2\beta}e^{-(\zeta\omega_n-\beta\omega_n)t} + \frac{\zeta-\beta}{2\beta}e^{-(\zeta\omega_n+\beta\omega_n)t}\right) \\ &= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left\{(\zeta+\beta)\,e^{\omega_n\beta t} - (\zeta-\beta)\,e^{-\omega_n\beta t}\right\}\right] \end{aligned} \tag{6}$$