

## 3章演習問題【3】

図1の左の系において、 $G(s) = K/(s-1)$  ( $K$  は正の定数) のときのステップ応答を計算し、 $t \rightarrow \infty$  のとき応答  $y(t)$  が  $K$  の値にかかわらず無限大に発散することを確認せよ。また、同図の右の系のようにフィードバックを加えたときのステップ応答  $y(t)$  を計算せよ。この結果を用いて、 $t \rightarrow \infty$  で  $y(t)$  が発散しないためには  $K$  をどのように選ぶべきか答えよ。

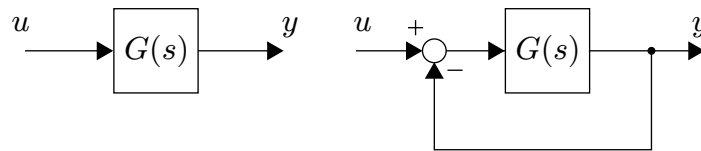


図1: フィードバック系

## 【解答】

$G(s)$  のステップ応答を、部分分数展開を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} G(s) \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{s-1} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ K \left( -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) \right] \\ &= K(-1 + e^t) \end{aligned} \quad (1)$$

よって時間とともに発散する。

次に、図1の右の系において、閉ループ系の伝達関数は、

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{s-1}}{1+\frac{K}{s-1}} = \frac{K}{s+K-1} \quad (2)$$

となり、このステップ応答は

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{G(s)}{1+G(s)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{s+K-1} \right] \quad (3)$$

によって計算できる。

$K=1$  のとき、

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{s^2} \right] = Kt \quad (4)$$

となり、 $K \neq 1$  のとき、

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{s(s+K-1)} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{K-1} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+K-1} \right) \right] \\ &= \frac{K}{K-1} (1 - e^{(1-K)t}) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。よって、発散させないためには、 $K > 1$  と選ばばよい。