2 章演習問題【7】

Fig. 1 に示される結合された二つのタンクからなる水位系を考える．第 1 のタンクには水が流量 $q_1(t)$[m^3/s] で流入しており, 第 2 のタンクからは流量 $q_3(t)$[m^3/s] で流出しているとする．また第 1 のタンクと第 2 のタンクは管で結ばれており, 流量 $q_2(t)$[m^3/s] の水が第 1 のタンクから第 2 のタンクへ流れているとしよう．ただし, タンクの断面積はぞれぞれ A_1[m^2], A_2[m^2] で一定であり, それぞれの水位を $h_1(t)$[m], $h_2(t)$[m] とする．いま平衡状態 $q_{10} = q_{20} = q_{30}$(一定) を考え, 第 1 のタンクへの流入量が $q_{10} + \delta q_1(t)$ の微小変化したとするとき, 対応する第 2 のタンクからの流出量が $q_{30} + \delta q_3(t)$ へと微小に変化したとする．このときの $\delta q_1(t)$ から $\delta q_3(t)$ までのブロック線図を描き, これを簡単化せよ．

【解答】

タンクへの水の流入量と流出量の差はタンク内の水の体積の変化率に等しい．また, タンクからの水の流出量は, 水位の平方根に比例する．よって, タンク 1, 2 に対してそれぞれ次式が成り立つ．ただし, k_1, k_2 は比例定数とする．

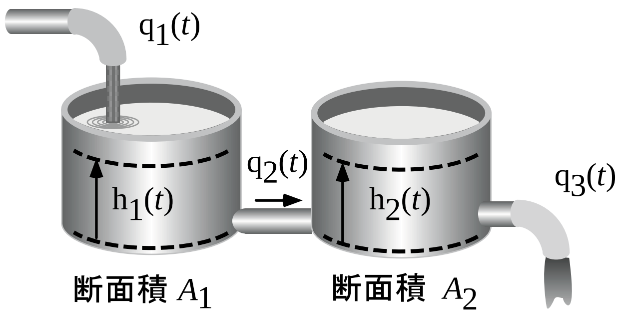

図 1: 問題図 2.7

第 1 タンクについて

$$A_1 \frac{d}{dt} h_1(t) = q_1(t) - q_2(t) \tag{1}$$
$$q_2(t) = k_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \tag{2}$$

第 2 タンクについて

$$A_2 \frac{d}{dt} h_2(t) = q_2(t) - q_3(t) \tag{3}$$
$$q_3(t) = k_2 \sqrt{h_2(t)} \tag{4}$$

平衡点のまわりでの微小変化に着目して

$$\begin{gathered} q_1(t) = q_{10} + \delta q_1(t), \quad q_2(t) = q_{20} + \delta q_2(t), \quad q_3(t) = q_{30} + \delta q_3(t) \\ h_1(t) = h_{10} + \delta h_1(t), \quad h_2(t) = h_{20} + \delta h_2(t) \end{gathered} \tag{5}$$

とおく．式 (1), (3) に式 (5) を用いると, $q_{10} = q_{20} = q_{30}$ から次式を得る．

$$A_1 \frac{d\delta h_1(t)}{dt} = \delta q_1(t) - \delta q_2(t) \tag{6}$$
$$A_2 \frac{d\delta h_2(t)}{dt} = \delta q_2(t) - \delta q_3(t) \tag{7}$$

次に式 (2), (4) を線形化する．式 (2) はテイラー展開を用いて

$$
\begin{aligned}
q_{20}+\delta q_2(t) &= k_1\left(\sqrt{h_{10}+\delta h_1(t)-(h_{20}+\delta h_2(t))}\right) \\
&= f(\delta h_1(t),\delta h_2(t)) \\
&= f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial \delta h_1(t)}(0,0)\delta h_1(t)+\frac{\partial f}{\partial \delta h_2(t)}(0,0)\delta h_2(t)+\cdots \\
&\simeq k_1\left(\sqrt{h_{10}-h_{20}}\right)+\frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}\delta h_1(t)-\frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}\delta h_2(t) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となり, 平衡状態では $q_{20}=k_1\sqrt{h_{10}-h_{20}}$ であるのでこれを引いて

$$\delta q_2(t)=\frac{1}{R_1}(\delta h_1(t)-\delta h_2(t)) \qquad (9)$$

となる．ただし, $R_1=\frac{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}{k_1}$ である．一方, 式 (4) はテイラー展開を用いて

$$
\begin{aligned}
q_{30}+\delta q_3(t) &= k_2\left(\sqrt{h_{20}+\delta h_2(t)}\right) \\
&= f(\delta h_2(t)) \\
&= f(0)+\frac{\partial f}{\partial \delta h_2(t)}(0)\delta h_2(t)+\cdots \\
&\simeq k_2\left(\sqrt{h_{20}}\right)+\frac{k_2}{2\sqrt{h_{20}}}\delta h_2(t) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となり平衡状態では, $q_{30}=k_2\sqrt{h_{20}}$ であるのでこれを引いて

$$\delta q_3(t)=\frac{1}{R_2}(\delta h_2(t)) \qquad (11)$$

となる．ただし，$R_2=\frac{2\sqrt{h_{20}}}{k_2}$ である．式 (6), (7), (9), (11) を ラプラス変換する．$\delta q_1(t)$, $\delta q_2(t)$, $\delta q_3(t)$, $\delta h_1(t)$, $\delta h_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $q_1(s)$, $q_2(s)$, $q_3(s)$, $h_1(s)$, $h_2(s)$ として, $t=0$ が平衡状態とすると次式となる.

$$
\begin{aligned}
A_1sh_1(s) &= q_1(s)-q_2(s) \quad (\because h_1(0)=0) && (12)\\
q_2(s) &= \frac{1}{R_1}\left(h_1(s)-h_2(s)\right) && (13)\\
A_2sh_2(s) &= q_2(s)-q_3(s) \quad (\because h_2(0)=0) && (14)\\
q_3(s) &= \frac{1}{R_2}h_2(s) && (15)
\end{aligned}
$$

これからそれぞれブロック線図を求めると, 図 2 のようになる.

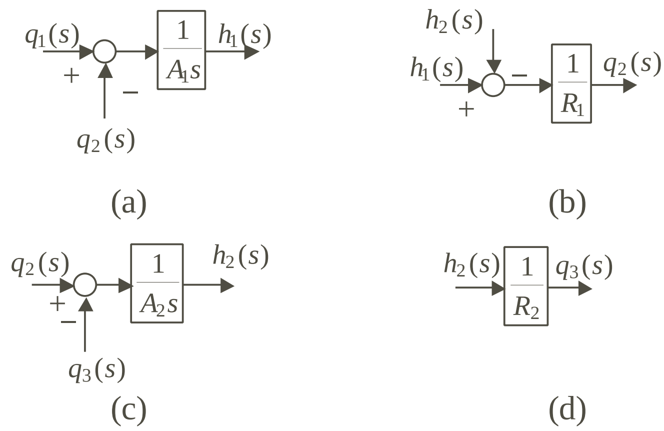

図 2:

つづいて図 2 を結合して図 3 を得る.

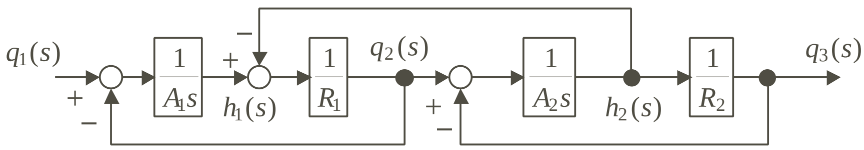

図 3:

さらに引き出し点と要素, 加え合せ点と要素の移動を行い図 4 を得る.

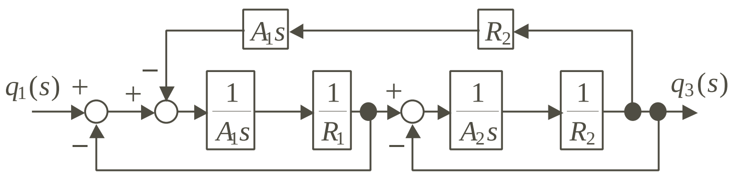

図 4:

引き出し点どうし, 加え合せ点どうしの入れ換えを行うと図 5 を得る.

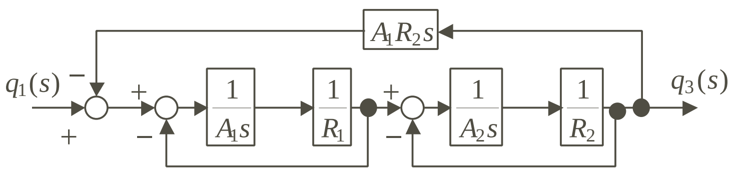

図 5:

図 6 のフィードバック結合の関係は, 次のように閉ループ系を作れば分かる.

$$
\begin{aligned}
y &= (u-y)AB \\
(1+AB)y &= ABu \\
\frac{y}{u} &= \frac{AB}{1+AB}
\end{aligned}
$$

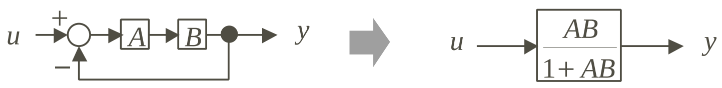

図 6:

図 6 の関係 (フィードバック結合) が成立することから図 7 を得る.

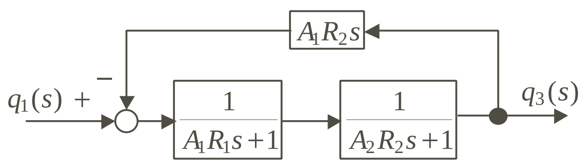

図 7:

フィードバック結合として簡単化すると, 図 8 を得る.

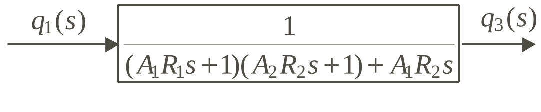

図 8:

よって, $\delta q_1(t)$ から $\delta q_3(t)$ までのブロック線図を描き, 簡単化できた.