2 章演習問題【4】

図に示される台車上の倒立振子を考える．この系は水平方向に動く質量 M $[kg]$ の台車と, その上の支点を中心に自由に振れる長さ l $[m]$ の質量が無視できる棒, およびその先端に取り付けられている質量 m $[kg]$ のボールからなっている．ここで, 支点における摩擦や空気の抵抗は無視できるとする．台車には水平方向に力 $f(t)$ $[N]$ が加わり, また振子の振れ角を $\theta(t)$ [rad], 台車の位置を $x(t)$ $[m]$ とする．系の運動方程式を $\theta(t)=0$ の近傍で線形化し, $f(t)$ から $\theta(t)$ までの伝達関数および $f(t)$ から $x(t)$ までの伝達関数を求めよ．

【解答】

倒立振子について, x 方向と回転の接線方向に関して運動方程式を立てると, 次のようになる．

$$M\ddot{x}(t)+m\frac{d^2}{dt^2}(x(t)+lsin\theta(t))=f(t) \tag{1}$$

$$ml\ddot{\theta}(t)=mg\sin\theta(t)-m\ddot{x}(t)\cos\theta(t) \tag{2}$$

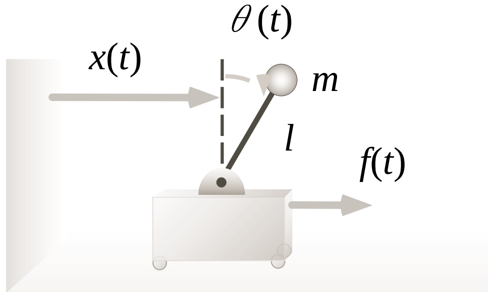

図 1: 倒立振子

これをもう少し整理すると

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}(t)-ml\dot{\theta}^2(t)\sin\theta(t)+ml\ddot{\theta}(t)\cos\theta(t)=f(t)\\ ml\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)=mg\sin\theta(t)\end{cases} \tag{3}$$

となる．

$\theta(t)\simeq 0$ であるとき $\sin\theta(t)\simeq\theta(t)$, $\cos\theta(t)\simeq 1$, $\dot{\theta}^2(t)\simeq 0$ とできるので

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}(t)+ml\ddot{\theta}(t)=f(t)\\ ml\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)=mg\theta(t)\end{cases} \tag{4}$$

となる．これより, $\ddot{x}(t)$ を消去すると $Ml\ddot{\theta}(t)-(M+m)g\theta(t)=-f(t)$ となり, $\theta(0)=0$ であることを考慮してラプラス変換すれば

$$\left\{Mls^2-(M+m)g\right\}\theta(s)=-f(s) \tag{5}$$

となる．よって, $f(t)$ から $\theta(t)$ までの伝達関数は

$$\frac{\theta(s)}{f(s)}=-\frac{1}{Mls^2-(M+m)g} \tag{6}$$

となる．同様に, $\ddot{\theta}(t)$ を消去すると $M\ddot{x}(t)+mg\theta(t)=f(t)$ となり, $x(0)=0$ であることを考慮してラプラス変換すれば,

$$Ms^2x(s)+mg\theta(s)=f(s) \tag{7}$$

となる．ここで, $\theta(t)$ から $x(t)$ までの伝達関数を求めると

$$\frac{x(s)}{\theta(s)}=\frac{g-ls^2}{s^2} \tag{8}$$

となる．よって, $f(t)$ から $x(t)$ までの伝達関数は

$$\frac{x(s)}{f(s)}=\frac{x(s)}{\theta(s)}\frac{\theta(s)}{f(s)}=\frac{ls^2-g}{s^2\left\{Mls^2-(M+m)g\right\}} \tag{9}$$

と求まる．