


Tokyo Institute of Technology

# 協調制御

## - 合意から被覆まで -



東京工業大学 藤田政之・畑中健志  
システム制御情報学会講演会  
チュートリアル講演  
2008年5月17日


Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory

Tokyo Institute of Technology


## 協調制御の動機

### 自然・生物の協調行動のメカニズム

© NHK プラネットアース



Fish 協調逃避-捕獲



Bird 協調飛翔

近くの情報だけを用いているにもかかわらず、  
全体として意味のある行動の発現

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory

Tokyo Institute of Technology

## 工学的展開

背景: 無線通信機能つき小型センサや組込みロボットの開発

広くユビキタスサービス (ITS・ホームオートメーション, etc)

各ユビキタス端末が協調することでサービスを提供

特に, **センサネットワーク**

複数のセンサを無線ネットワークで接続して情報収集



MICAz (Crossbow)  
<http://www.xbow.jp/motemical.html#kit>



建物の状態  
事故、振動  
施設の異常監視  
想定されるシナリオ



安心、安全の街づくり  
自然環境の監視  
地震の情報収集

飯野, 畑中, 藤田 "センサネットワークと制御理論", 計測と制御, 47-8, 2008

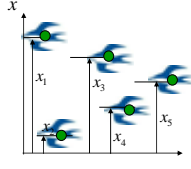
Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory

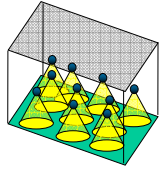
Tokyo Institute of Technology

## 講演の流れ

### 本講演の目的

- 代表的な協調制御問題である
  - 合意問題
  - 被覆制御問題
- に関する基本的な結果を紹介する
- 関連する話題を紹介する





Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory

Tokyo Institute of Technology

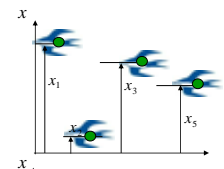
# 合意問題

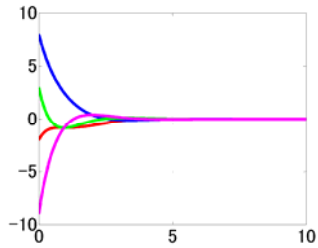
Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory

Tokyo Institute of Technology

## 合意問題

**合意問題:** 複数のエージェント(制御対象)の状態の値を同じ値に収束させる問題





Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory

### システム表現

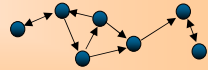
Tokyo Institute of Technology

**マルチエージェントシステムモデル**

ダイナミクス: 積分器  
 $\dot{x}_i(t) = u_i(t), x_i(0) = z_i \in \mathbb{R} \quad i \in I := \{1, \dots, n\}$

相互結合: グラフ  $G = (V, E)$   
 $V = \{1, \dots, n\}, E \subseteq V \times V$

近傍 ( $i$  が情報を利用できるもの):  $N_i = \{j \in V | (j, i) \in E\}$



$V = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $E = \{(1,3), (2,1), (2,3), (3,4)\}$   
 $N_1 = \{2\} \quad N_2 = \emptyset \quad N_3 = \{1, 2\} \quad N_4 = \{3\}$

$\mathbf{1} = [1 \ \dots \ 1]^T, x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T, u = [u_1 \ \dots \ u_n]^T$

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 7

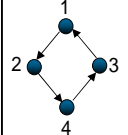
### 様々なグラフ

Tokyo Institute of Technology

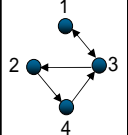
**定義1 (様々なグラフ):** グラフ  $G = (V, E)$  が与えられたとする

- i) 全てのノードについて入ってくる枝の数(入次数)と出て行く枝の数(出次数)等しいとき,  $G$  は**平衡グラフ**であるという
- ii) 任意の互いに異なるノード間を結ぶ有向路が存在するとき,  $G$  は**強連結グラフ**という
- iii) あるノードが存在して, そこから任意のノードへの有向路が存在するとき,  $G$  は**全域木を含む**という

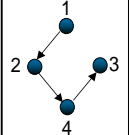
平衡グラフ



強連結グラフ



全域木を含むグラフ

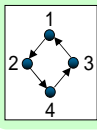


Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 8

### グラフラプラシアン

Tokyo Institute of Technology

$L = [l_{ij}], l_{ij} = \begin{cases} d_i^{\text{in}}, & i = j \\ -1, & j \in N_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$



$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$d_i^{\text{in}}$ : ノード  $i$  に入ってくる枝の数

**補題1:** 任意のグラフに対して, その**グラフラプラシアン**  $L$  は少なくとも一つのゼロ固有値をもち,  $\text{rank } L \leq n-1$  が成立する. また,  $\mathbf{1}$  はゼロ固有値に対応する右固有ベクトルである

**補題2:** グラフ  $G$  が全域木を含めば対応する**グラフラプラシアン** は  $\text{rank } L = n-1$  を満足し, かつ唯一つのゼロ固有値以外の全ての固有値の実部が正である.

**補題3:** グラフが強連結ならば全ての要素が正の左固有ベクトル  $\gamma$  が存在して  $\gamma^T L = 0$  を満足し, グラフが平衡ならば  $\gamma = \mathbf{1}$ .

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 9

### 合意問題

Tokyo Institute of Technology

**定義2 (合意問題) (cf. 分散アルゴリズム)**

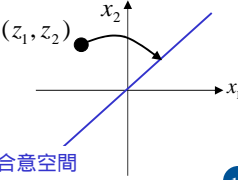
次式が成り立つとき, 合意が達成されたという

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0 \quad \forall i, j \in I$$

平均合意: 収束値が  $\frac{1}{n} \sum_{i \in I} z_i$  となる場合

合意空間  $X_C = \{x | x = \alpha \mathbf{1}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ,  
への収束問題と捉えることができる

合意空間こそマルチエージェントシステムが形成すべき秩序



合意空間

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 10

### 合意制御則

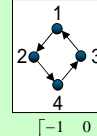
Tokyo Institute of Technology

**合意制御則**  
 $u_i(t) = \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) \Rightarrow \dot{x}(t) = u(t) = -Lx(t)$

閉ループ系の軌道はグラフラプラシアンによって完全に特徴付けられる

近傍の情報のみ使用 (相互作用・相互フィードバック)

合意の達成は通信グラフの構造次第



$u_1 = x_3 - x_1$   
 $u_2 = x_1 - x_2$   
 $u_3 = x_4 - x_3$   
 $u_4 = x_2 - x_4$

どのようなグラフなら合意が達成されるか

$$u(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) = -Lx(t)$$

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 11

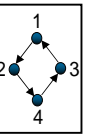
### 収束性

Tokyo Institute of Technology

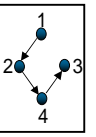
**定理 (合意の達成)**

- 合意が達成されるための**必要十分条件**はグラフが**全域木を含む**ことである[1]
- グラフが**強連結・平衡**ならば**平均合意**が達成される[2]

強連結・平衡グラフ



全域木を含むグラフ

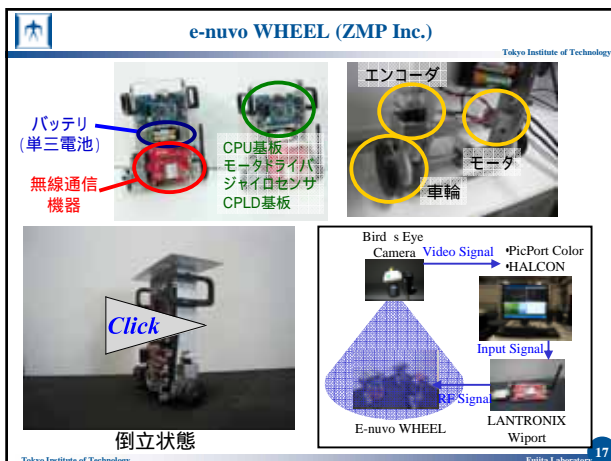
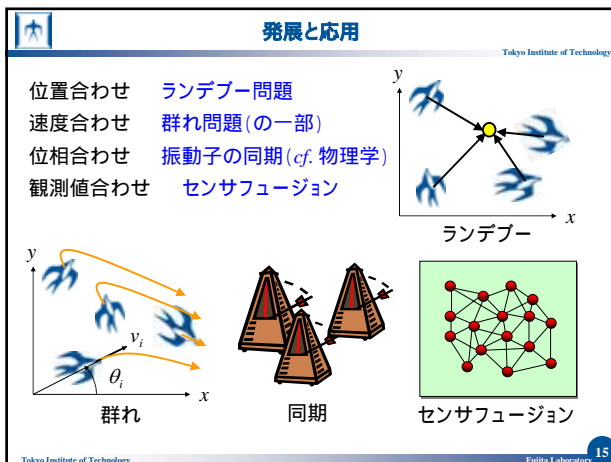
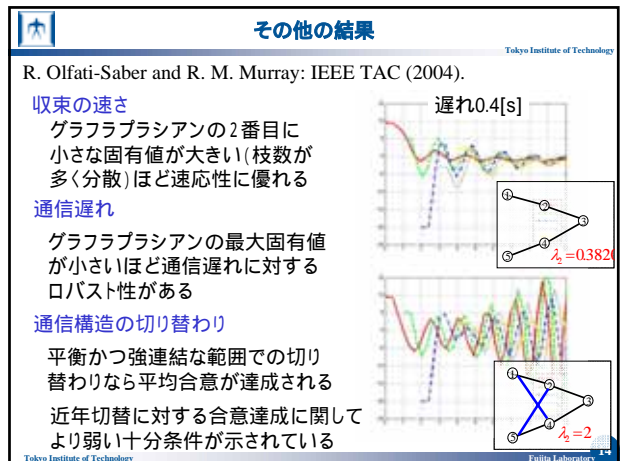
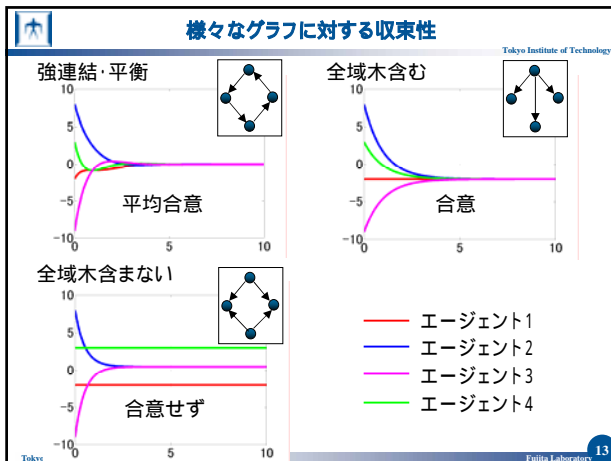


平衡でなくともあらかじめ収束値を知ることができる[2]

[1] W. Ren and R. W. Beard: Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control Theory and Applications, Springer (2007).

[2] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray: Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, Proceedings of the IEEE, Vol. 95, No. 1, pp. 215-233 (2007).

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 12



Tokyo Institute of Technology

# 被覆制御問題

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 19

Tokyo Institute of Technology

## 被覆制御とは

被覆制御問題: 与えられた領域を最適に被覆するように移動体を制御することを目的とした制御

想定される適用対象:

- 効率的なセンサネットワークの構築
- 探索, レスキュー
- 施設および自然環境の監視



S. Martinez, J. Cortes, and F. Bullo:  
Motion Coordination with Distributed Information; IEEE Control Systems Magazine, Vol. 27, No. 4, pp. 75-88, 2007.

J. Cortes, S. Martinez, T. Karatas and F. Bullo:  
Coverage Control for Mobile Sensing Networks; IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 20, No. 2, pp. 243-255, 2004.

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 20

Tokyo Institute of Technology

## ボロノイ分割・ドローネーグラフ

定義3 (ボロノイ分割) (cf. 計算幾何)

$$\{V_1(p), \dots, V_n(p)\}$$

$$V_i(p) = \{q \in Q \mid \|q - p_i\| \leq \|q - p_j\| \forall i \neq j\}, i \in I$$

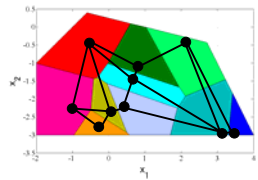
$p_1, \dots, p_n$  の中で  $p_i$  が最も近い

定義4: ドローネーグラフ

$$G = (I, E_D)$$

$$(i, j) \in E_D \Leftrightarrow V_i \cap V_j \neq \emptyset$$

ボロノイ図が境界を接するエージェントとのみ通信



Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 21

Tokyo Institute of Technology

## システム表現

マルチエージェントシステムモデル

ダイナミクス:  $\dot{p}_i = u_i$   $p_i \in R^2$ : エージェント  $i$  の位置

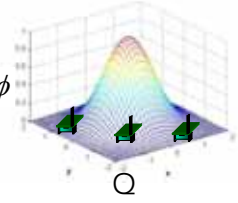
相互通信: ドローネーグラフ

場の定義

被覆領域:  $Q$  (凸多面体)

重要度:  $\phi(\cdot): R^2 \rightarrow R$

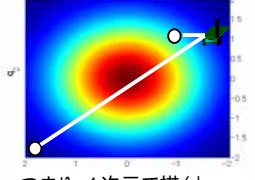
各エージェントが場の情報を計測するとして, その精度 (性能) をモデル化する必要がある



Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 22

Tokyo Institute of Technology

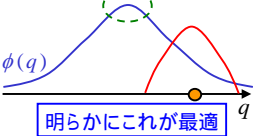
## 性能関数と単一エージェントの被覆



遠くの情報のセンシング精度は近くのものよりも劣る

$p_i$  による  $q$  の被覆性能:  $-\|q - p_i\|^2$

つまり, 1 次元で描くと...



重要度が高いところの情報を正確に取得したい

エージェントがただ1つならば...

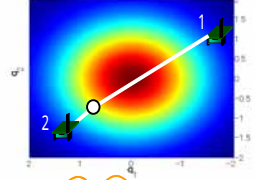
明らかにこれが最適

評価関数:  $H(p) = \int_{q \in Q} -\|q - p_i\|^2 \phi(q) dq$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 23

Tokyo Institute of Technology

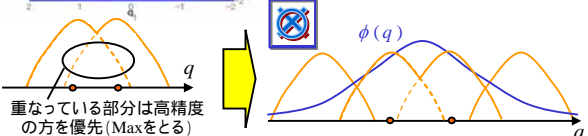
## 複数エージェントによる被覆



○ の位置の情報を計測するとして...

エージェント1の情報の精度は2のものよりも劣る

1の計測情報が使われることはない



重なっている部分は高精度の方を優先 (Maxをとる)

集団目的関数:  $H(p) = \int_{q \in Q} \max_{i=1,2} -\|q - p_i\|^2 \phi(q) dq$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 24

### 被覆制御問題

定義 (被覆制御問題)  
各エージェントを最終的に以下の集団目的関数の(局所的)最大値に到達させる分散制御則  $u_i, i \in I$  を決定せよ.

集団目的関数:  $H(p) = \int_{q \in Q} \max_i -\|q - p_i\|^2 \phi(q) dq$

$V_i = \{q \mid \|q - p_i\| \leq \|q - p_j\| \ \forall j \neq i\}$   
ポロノイ領域  
 $V_i$  は  $p_i$  の担当領域とみなせる

$H(p) = H_V := \sum_{i \in I} \int_{q \in V_i} -\|q - p_i\|^2 \phi(q) dq$

Tokyo Institute of Technology  
Fujita Laboratory 25

### 被覆制御問題における秩序

定義5 (重心ポロノイ配置)  
配置  $p = (p_1, \dots, p_n)$  が次式を満たすとき, 重心ポロノイ配置と呼ぶ

$$p_i = C_{V_i} \ \forall i$$

$M_V := \int_{q \in V} \phi(q) dq, \ C_V := \frac{1}{M_V} \int_{q \in V} q \phi(q) dq$

局所的な最大値を取る配置では  $\nabla H_V = 0$  が成立

$$\frac{\partial H_V}{\partial p_i}(p) = -\sum_j \int \frac{\partial}{\partial p_i} \|q - p_j\|^2 \phi(q) dq = 2M_{V_j}(C_{V_j} - p_i)$$

$\nabla H_V = 0 \Leftrightarrow$  重心ポロノイ配置

重心ポロノイ配置こそ複数のエージェントが形成すべき秩序

Tokyo Institute of Technology  
Fujita Laboratory 26

### 被覆制御アルゴリズム

被覆制御則

$$u_i = 2M_{V_i}(C_{V_i} - p_i)$$

$\downarrow$

$$\dot{p} = \nabla H_V$$

閉ループ系はポテンシャル関数  $-H_V$  に関する勾配系

$\downarrow$

$\nabla H_V = 0$  に収束  
つまり重心ポロノイ配置に収束

注意:

- 被覆制御アルゴリズムはドローングラフの意味で分散制御である
- 一般に重心ポロノイ配置は一意ではない。ただし、重心ポロノイ配置が有限通りしかなければそのうちのどれかに収束する。

Tokyo Institute of Technology  
Fujita Laboratory 27

### 被覆制御則の適用結果

重要度

Click

Tokyo Institute of Technology  
Fujita Laboratory 28

### 被覆制御則の適用結果

Tokyo Institute of Technology  
Department of Control & Systems Engineering  
Fujita Lab.

Tokyo Institute of Technology  
Fujita Laboratory 29

### 複数タスクの実行

Click

Tokyo Institute of Technology  
Fujita Laboratory 30

**勾配系に基づく合意問題**

Tokyo Institute of Technology

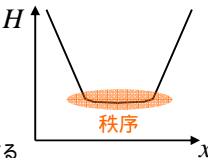
集団目的関数:  $H(x) = \frac{1}{2} x^T Lx \Rightarrow \nabla H(x) = Lx$

被覆制御則:  $u = -Lx = -\nabla H$

ポテンシャル関数  $H$  の勾配系

→ 集団目的関数の極小値へ誘導する

→ 極小値を与えるのは合意空間  
ただし通信グラフは無向グラフとする



- 極小値(極大値)が達成すべき秩序を規定する
- 勾配が近傍情報のみに依存する

S. Martinez, J. Cortes, and F. Bullo:  
Motion Coordination with Distributed Information; IEEE Control Systems Magazine, Vol. 27, No. 4, pp. 75-88, 2007.

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 31

**近年の動向**

Tokyo Institute of Technology

近年の動向

様々な側面からの統一・統合化:

- モデル・タスク・設計対象などのフォーマルな表現  
Martinez, Bullo, Cortes, and Frazzoli: IEEE TAC (2007)
- 分散協調制御則の一般的な設計法  
Martinez, Cortes, and Bullo: IEEE Control Systems Magazine(2007)
- 個別の制御問題や協調モデルの等価性の証明  
Gao, Cortes and Bullo: Automatica (2008) など

合意 - 被覆の等価性

その他の動向: 複雑ネットワーク上の合意, SE(3)上での協調

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 32

**特集記事**

Tokyo Institute of Technology

- Control Systems Magazine  
Complex Networked Control Systems  
Vol. 27, No. 4, 2007
- IEEE Trans. on Control Systems Technology  
Special Issue on Multi-vehicle Systems  
Cooperative Control with Application  
Vol. 15, No. 4, 2007
- Proceedings of the IEEE  
Special Issue on Networked Control Systems,  
Vol. 49, No. 9, 2007
- IET Control Theory & Applications  
Cooperative Control of Multiple Spacecraft Flying in  
Formation, Vol. 1, No. 2, 2007
- International Journal of Robust and Nonlinear Control  
Special Issue on Cooperative Control of Unmanned  
Aerial Vehicles, Vol. 18, No. 2, 2008
- Asian Journal of Control  
Special Issue on Collective Behavior and Control of Multi-  
Agent Systems, Vol. 10, No. 1, 2008



Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 33

**研究のつながり**

Tokyo Institute of Technology

大規模システム・分散制御理論

池田雅夫先生(大阪大)  
計測と制御, Vol. 46, No. 11, 2007


ゲーム・チーム理論

内田健康先生(早稲田大)  
計測と制御, Vol. 46, No. 11, 2007

自律分散システム論

(故)伊藤正美先生

自律分散システムとはシステムを構成する各要素が(中略)互いに協調し, システム全体として秩序を生成するシステムのことである。



Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 34

Tokyo Institute of Technology

Thank you!

Tokyo Institute of Technology Fujitsu Laboratory 35