受動性に基づく3次元姿勢協調問題

FL07－12－2
石野 知宏

アウトライン

- はじめに
- 問題設定
- 収束性の解析
- シミュレーション
- まとめ

アウトライン

- はじめに
- 問題設定
- 収束性の解析
- シミュレーション
- まとめ

はじめに

- 協調制御：複数台のエージェントの群れに望みの協調行動をさせること
- 応用例：センサネットワーク，ロボットネットワーク，衛星や航空機のフォーメーション制御

Fig1．鳥の協調制御

アウトライン

- はじめに
- 問題設定
- 収束性の解析
- シミュレーション
- まとめ

3次元システムのモデリング（各エージェント）

3次元空間上に剛体と仮定できるn台のエージェントが存在する状況を考える

各エージェントの運動学モデル

$$\begin{cases} \dot{p}_i = e^{\hat{\zeta}_i} v_i \\ \dot{\zeta}_i = e^{\hat{\zeta}_i} \omega_i \quad i \in \{1, \cdots, n\} \\ \zeta_i = \theta_i \xi_i \end{cases} \quad (1)$$

$p_i \in \mathbf{R}^3$ 位置

$e^{\hat{\zeta}_i} \in SO(3)$ 姿勢

$v_i \in \mathbf{R}^3$ ボディ速度

$\omega_i \in \mathbf{R}^3$ ボディ角速度

$\xi_i \in \mathbf{R}^3$ 回転軸

$\theta_i \in \mathbf{R}$ 回転角度

$\wedge$ (wedge)

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix}^{\wedge} := \begin{bmatrix} 0 & -\xi_z & \xi_y \\ \xi_z & 0 & -\xi_x \\ -\xi_y & \xi_x & 0 \end{bmatrix}$$

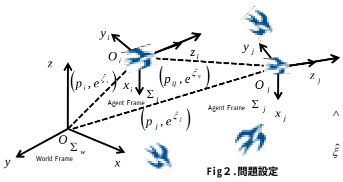


Fig2．問題設定

3次元システムのモデリング (エージェント間)

近傍 $N_i := \{ j \mid j \in \mathrm{V}, (j,i) \in \mathrm{E} \}$

V :グラフの頂点集合 (エージェントを頂点とみなす)

E :グラフの辺集合 (エージェント間の通信を辺とみなす)

各エージェントは近傍のエージェントのみと通信する

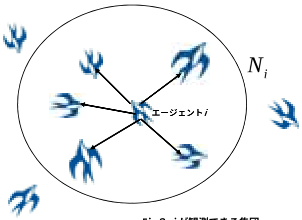


Fig3 . iが観測できる集団

仮定

(A) 回転行列 $e^{\hat{\xi}_i}, \forall i \in \{1, \cdots n\}$は正定

(B) $v_i = v_j, \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$,かつ$|v_i| = 1, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$

(C) グラフは固定, 平衡, 強連結である

固定:グラフの形は不変

平衡:各頂点の入次数と出次数が等しい

強連結:任意の2頂点に対し経路が存在

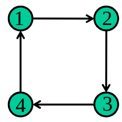


Fig4 . 平衡かつ強連結グラフ

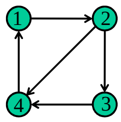


Fig5 . 平衡でないグラフ

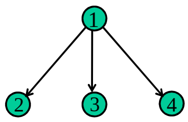


Fig6 . 強連結でないグラフ

第6回FLゼミ:グラフは固定, 無向, 連結

姿勢協調

定義

全てのエージェントの姿勢が一定値に収束, つまり

$$\lim_{t \to \infty} \left(e^{\hat{\xi}_i(t)} - e^{\hat{\xi}_j(t)} \right) = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

が成立するとき、姿勢協調が達成されたという

仮定 (2) より、全てのエージェントの姿勢が等しくなると、
絶対座標系から見た速度も等しくなる

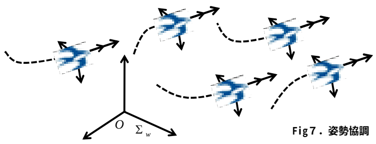


Fig7 . 姿勢協調

アウトライン

- はじめに
- 問題設定
- 収束性の解析
- シミュレーション
- まとめ

角速度入力

入力を $\omega_i = \sum_{j \in N_i} \mathrm{sk}\left(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j} \right)^{\vee} \quad i \in \{1, \cdots, n\}$ (2) とする

近傍のエージェントとの相対姿勢誤差ベクトルを角速度
入力としている

$$\mathrm{sk}(A) := \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$\wedge$ (wedge), $\vee$ (vee)

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix}^{\wedge} := \begin{bmatrix} 0 & -\xi_z & \xi_y \\ \xi_z & 0 & -\xi_x \\ -\xi_y & \xi_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\xi_z & \xi_y \\ \xi_z & 0 & -\xi_x \\ -\xi_y & \xi_x & 0 \end{bmatrix}^{\vee} \equiv \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix}$$

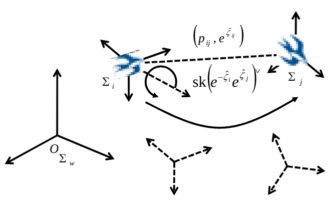


Fig8 . 相対姿勢誤差ベクトル

例

回転行列を z軸周りに固定したとする

$$e^{\hat{\xi}_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j - \theta_i) & -\sin(\theta_j - \theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_j - \theta_i) & \cos(\theta_j - \theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = \mathrm{sk}(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\theta_j - \theta_i) \end{bmatrix}$$

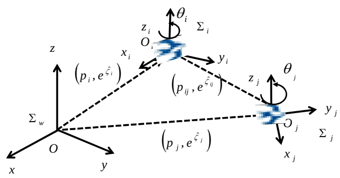


Fig9 . 2次元に等価なシステム

2次元の運動学モデルに等価 (第6回FLゼミ)

定理

定理

運動学モデル (1) を持つ n台のエージェントに対して，
各エージェントに角速度入力 (2) を加える

このとき，仮定 (A)，(B)，(C) が満たされれば**姿勢協調**が達成される

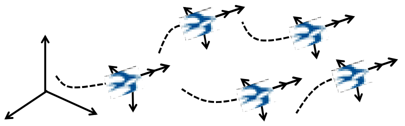


Fig10．姿勢協調

収束性の証明 (1)

運動学モデル (1) は入力 $\nu_i = \begin{bmatrix} v_i^T & \omega_i^T \end{bmatrix}^T$
から出力 $y_i = \begin{bmatrix} (e^{\hat{\xi}_i} p_i)^T & (\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i})^\vee)^T \end{bmatrix}^T$ まで受動性を有する

ポテンシャル関数Vを以下のように定義する

$$V := \phi\left(e^{\hat{\xi}_1}\right) + \phi\left(e^{\hat{\xi}_2}\right) + \cdots + \phi\left(e^{\hat{\xi}_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - e^{\hat{\xi}_i})$$

$\phi\left(e^{\hat{\xi}_i}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - e^{\hat{\xi}_i})$

1. $\phi\left(e^{\hat{\xi}_i}\right) \geq 0$ かつ $\phi\left(e^{\hat{\xi}_i}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\hat{\xi}_i} = I$

2. $\dot{\phi}\left(e^{\hat{\xi}_i}\right) = (\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i})^\vee)^T \omega_i$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i})^\vee)^T \omega_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} (\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i})^\vee)^T \mathrm{sk}(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})^\vee$$

収束性の証明 (2)

$$(\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i})^\vee)^T \mathrm{sk}(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})^\vee$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}((\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i}))\,\mathrm{sk}(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}))$$

$$= -\frac{1}{8}\mathrm{tr}(2e^{\hat{\xi}_j} - 2e^{-2\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})$$

$$= -\phi(e^{\hat{\xi}_i}) + \phi(e^{\hat{\xi}_j}) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}((e^{\hat{\xi}_i} + e^{\hat{\xi}_i})(I - e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}))$$

$$a^T b = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{a}\hat{b})$$

$$-\mathrm{tr}((e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i})(I - e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})) \leq -\lambda_{min}(e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i})\,\mathrm{tr}(I - e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})$$

が成り立つことを用いて　$\lambda_{min}(B)\,\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(AB)$

$$(\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}_i})^\vee)^T \mathrm{sk}(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})^\vee$$

$\leq -\phi(e^{\hat{\xi}_i}) + \phi(e^{\hat{\xi}_j}) - \frac{1}{4}\lambda_{min}(e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i})2\phi(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j})$ とできる

収束性の証明 (3)

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} (-\phi(e^{\hat{\xi}_i}) + \phi(e^{\hat{\xi}_j}) - \frac{1}{2}\lambda_{min}(e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i})\phi(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}))$$

グラフが平衡であるので

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \phi(e^{\hat{\xi}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \phi(e^{\hat{\xi}_j})$$

が成り立つ

$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \frac{1}{2}\lambda_{min}(e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i})\phi(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}) \leq 0$ (**準負定**)

$(e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i})$は正定対称行列なので$\lambda_{min}(e^{\hat{\xi}_i} + e^{-\hat{\xi}_i}) > 0$

収束性の証明 (4)

$\dot{V} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{min}(e^{\hat{\xi}_i} + e^{\hat{\xi}_i})\phi(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}) = 0$

$\Rightarrow \phi(e^{-\hat{\xi}_i} e^{\hat{\xi}_j}) = 0 \quad (j, i) \in \mathrm{E}$

$\Rightarrow e^{\hat{\xi}_i} = e^{\hat{\xi}_j} \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$ (グラフは強連結)

ラ･サールの不変原理を適用すると

$e^{\hat{\xi}_1} = e^{\hat{\xi}_2} = \cdots = e^{\hat{\xi}_n} \quad (t \to \infty)$

(全てのエージェントの姿勢が一定値に収束)

エージェント集団は**姿勢協調**を達成する

アウトライン

- はじめに
- 問題設定
- 収束性の解析
- シミュレーション
- まとめ

設定

初期状態

$p_1(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $p_2(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ $p_3(0)=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $p_4(0)=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\zeta_1(0)=\begin{pmatrix}-0.07\\-0.24\\0.52\end{pmatrix}$ $\zeta_2(0)=\begin{pmatrix}0\\1.05\\0\end{pmatrix}$ $\zeta_3(0)=\begin{pmatrix}-0.21\\0.77\\-0.50\end{pmatrix}$ $\zeta_4(0)=\begin{pmatrix}-0.14\\0.51\\-0.51\end{pmatrix}$

速度

$v_i=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \forall i\in\{1,\cdots,4\}$

グラフ

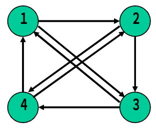
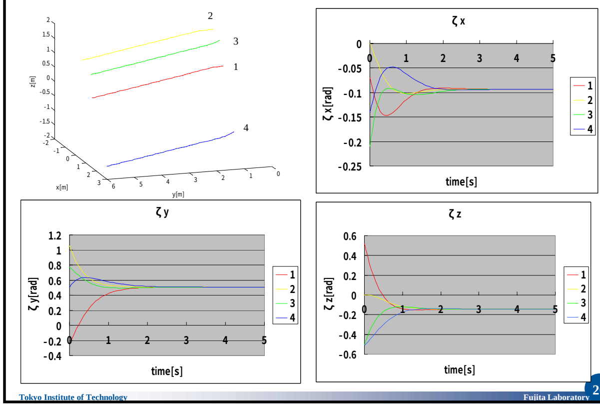


Fig11．グラフ

結果



アウトライン

- はじめに
- 問題設定
- 収束性の解析
- シミュレーション
- まとめ

まとめ

- 各エージェントの3次元運動モデル

$$\begin{cases}\dot{p}_i=e^{\hat{\zeta}_i}v_i\\ \dot{\zeta}_i=e^{\hat{\zeta}_i}\omega_i \quad i\in\{1,\cdots,n\}\\ \zeta_i=\theta_i\xi_i\end{cases}$$

$p_i\in\mathbf{R}^3$	位置
$e^{\hat{\zeta}_i}\in SO(3)$	姿勢
$v_i\in\mathbf{R}^3$	ボディ速度
$\omega_i\in\mathbf{R}^3$	ボディ角速度
$\xi_i\in\mathbf{R}^3$	回転軸
$\theta_i\in\mathbf{R}$	回転角度

- 制御入力

$$\omega_i=\sum_{j\in N_i}\mathrm{sk}\left(e^{-\hat{\zeta}_i}e^{\hat{\zeta}_j}\right)^{\vee}$$

- 仮定

(A) 回転行列 $e^{\hat{\zeta}_i}, \forall i\in\{1,\cdots n\}$ は正定

(B) $v_i=v_j, \forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$, かつ $|v_i|=1, \forall i\in\{1,\cdots,n\}$

(C) グラフは固定，平衡，強連結である

- 定理　エージェント集団は姿勢協調を達成する