Robust Set Invariance Theory
の論文紹介

ＦＬ０７－０６－１
芥川浩之

Outline

1. はじめに
   ・背景と動機
2. 準備(Preparation for Chapter 3)
3. 初期状態集合の構成
   (Composition of Initial State Set)
4. おわりに

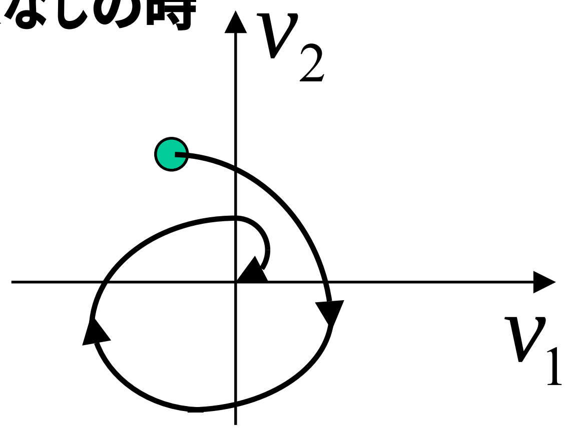
1.はじめに

最適制御問題を解く

例：$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

$$\min \sum_{i=0}^{\infty} \{x_i^T Q\, x_i + u_i^T R\, u_i\}$$

拘束なしの時

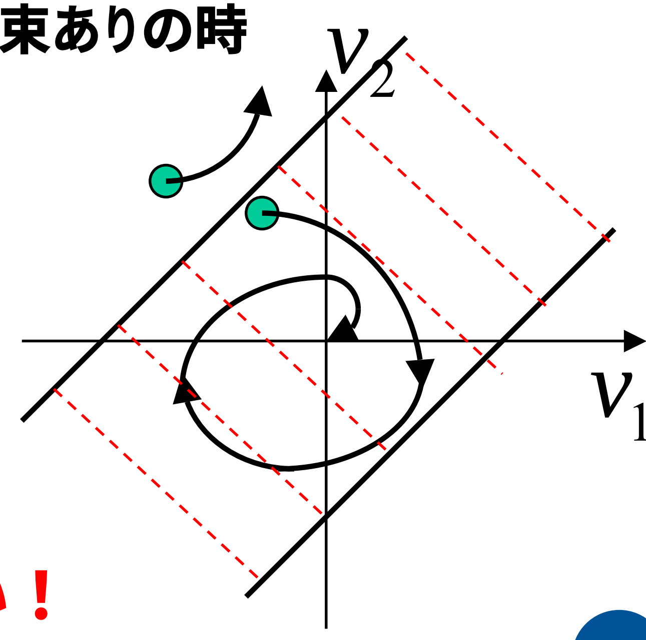


●：Initial state

システムを安定化できるか？

$\Longleftarrow$ 可制御

拘束ありの時



拘束条件があると・・・・・・・

$$\begin{cases} x(t) \in X \\ u(t) \in U \end{cases} \quad {}^{\forall} t \in \{0, \cdots, N\}$$

初期状態がある集合内になければならない！

1.はじめに

モデル予測制御法

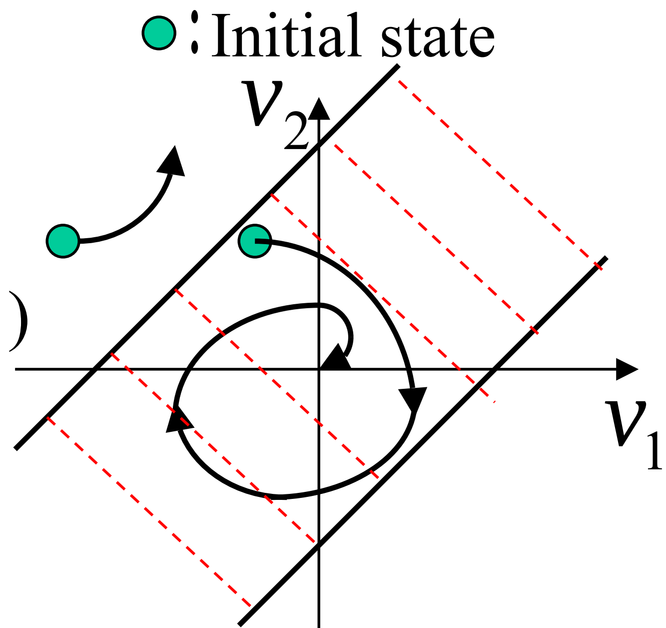
有限時間最適制御問題を繰り返し解く

例：

$$\min \sum_{i=0}^{N-1} \{x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i\} + x^T(N) P x(N)$$

$$\begin{cases} x(t) \in X & \\ u(t) \in U & \forall t \in \{0, \cdots, N\} \\ x(N) \in T & \end{cases}$$

T:**終端制約集合**



拘束ありの時

ここでもやはり、ある集合に初期状態がなければならない！

ある集合？どんな集合？

2.準備(Preparation for Chapter 3)

今回は以下のような離散時間システムについて考えていきます。

簡単のため外乱を無視しています。

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

x_k はシステムの状態、u_k は制御入力です

このシステムには入力と状態に以下のような拘束条件があるとします

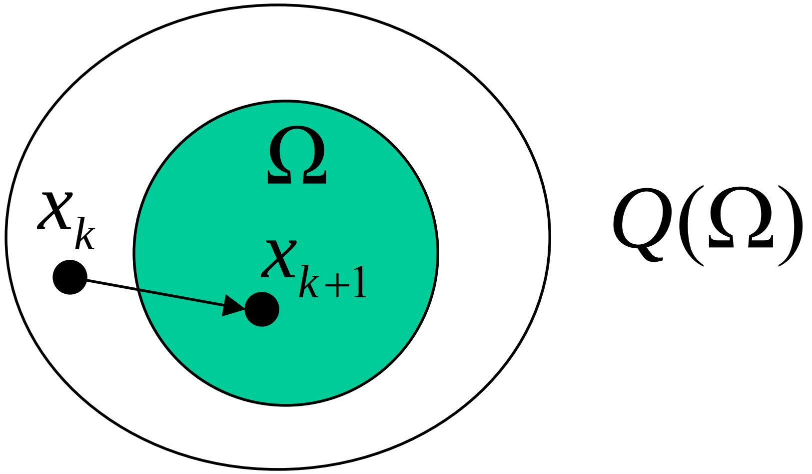
$$u_k \in U \subset \Re^m$$
$$x_k \in X \subseteq \Re^n$$

2.1Robust One-Step Set

Definition (開ループ系のとき，$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$)

状態xに対してある入力uが存在して、1ステップでΩに入るような状態xの集合$Q(\Omega)$

$$Q(\Omega) = \{x_k \in \Re^n \,|\, {}^{\exists}u_k \in U : x_{k+1} \in \Omega\}$$



2.2 Robust Control Invariant Sets

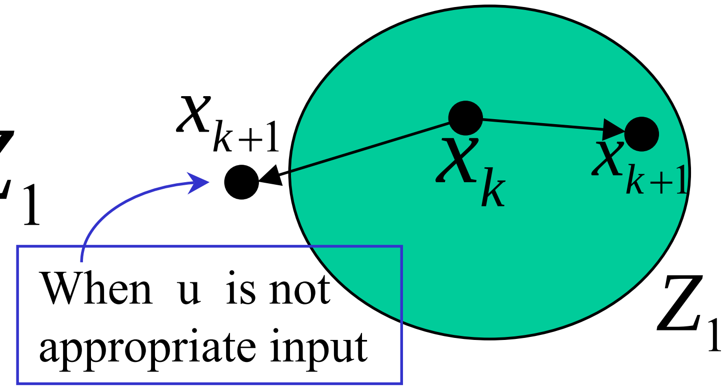
Definition (開ループ系のとき, $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$)

任意の初期状態x_0に対してある入力uが存在して Z_1 内にずっと留まれるような集合

In other words

$$x_k \in Z_1 \Rightarrow {}^{\exists}u_k \in U : x_{k+1} \in Z_1$$

※ $Z_1 \subset \Omega$



●Maximal robust control invariant set

Definition

$C_\infty(\Omega)$ **が**robust control invariant set **であり、Ω内に他の全ての** robust control invariant sets**を含むとき**, $C_\infty(\Omega)$ **を**Maximal robust control invariant set**という**

上の定義より明らかに $C_\infty(\Omega)$ はunique**である**

2.3Geometric condition for invariance

Theorem(Geometric condition for invariance)

The set $\Omega \subset \Re^n$ is a robust control invariant set

if and only if $\Omega \subseteq Q(\Omega)$

Proof: 背理法を用いて証明する

$(\Rightarrow)$ もし$\Omega \not\subset Q(\Omega)$ なら$Q(\Omega)$ の要素ではない

$^\exists x_k \in \Omega$ が存在する。つまり $^\forall x_k \in \Omega$

に対して $x_{k+1} \in \Omega$ となるようなある入力uが存在しない。

よってΩはrobust control invariant setではない。

$(\Leftarrow)$もしΩがrobust control invariant setではないなら $x_{k+1} \in \Omega$

となるようなある入力uが存在しない$^\exists x_k \in \Omega$ がある。

つまり、$Q(\Omega)$の要素ではない$^\exists x_k \in \Omega$がある。

よって$\Omega \not\subset Q(\Omega)$

証明終わり。

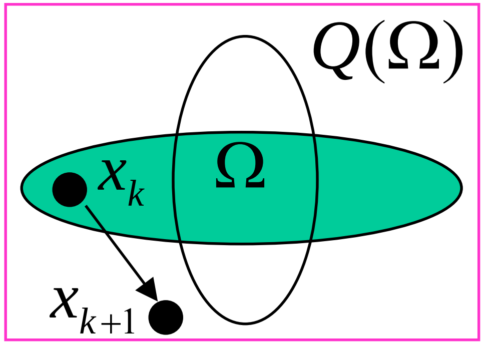


Fig. $\Omega \not\subset Q(\Omega)$

2.3Geometric condition for invariance

このTheoremから次のことが言える

Ω is robust control invariant if and only if $\Omega \cap Q(\Omega) = \Omega$

,since $\Omega \cap Q(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \Omega \subset Q(\Omega)$

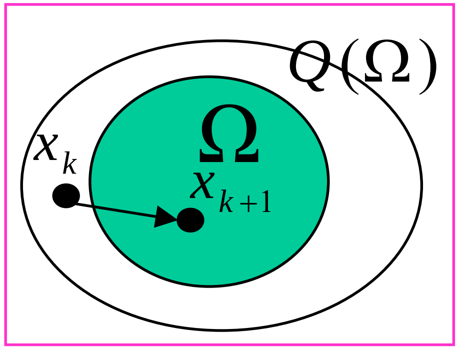


Fig. $\Omega \subset Q(\Omega)$

●Algorithm(**Ω** is invariant set or not)

1. Compute $Q(\Omega)$
2. $\Omega \subseteq Q(\Omega)$かどうかテストする
3. もし$\Omega \subseteq Q(\Omega)$ ならΩはrobust control invariant.
   もし$\Omega \not\subset Q(\Omega)$ならΩはnot robust control invariant.

2.4 Robust Positively Invariant Sets

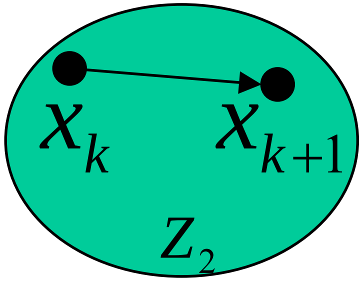
Definition (閉ループ系のとき $x_{k+1} = f(x_k, h(x_k))$)

任意の初期状態 x_0 を Z_2 内に置いた時ずっと Z_2 内に留まるような集合

In other words

$$x_k \in Z_2 \Rightarrow x_{k+1} \in Z_2$$

※ $Z_2 \subset \Omega$



●Maximal robust positively invariant set

Definition

$O_\infty(\Omega)$ **が**robust positively invariant set **であり、Ω内に他の全ての** robust positively invariant sets**を含むとき**, $O_\infty(\Omega)$ **を**Maximal robust positively invariant set**という**

上の定義より明らかに $O_\infty(\Omega)$ はunique**である**

3. 初期状態集合の構成
(Composition of Initial State Set)

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

$$\min \sum_{i=0}^{N-1} \{x_i{}^T Q x_i + u_i{}^T R u_i\} + x^T(N) P x(N)$$

$$\begin{cases} x(t) \in X & \\ u(t) \in U & {}^\forall t \in \{0, \cdots, N\} \\ x(N) \in T & \text{T:終端制約集合} \end{cases}$$

有限ステップ間にtarget set に状態を到達させるための制御入力uを見つけるには robust controllable setsを見つけるということと関連している

3.1Robust Controllable Sets

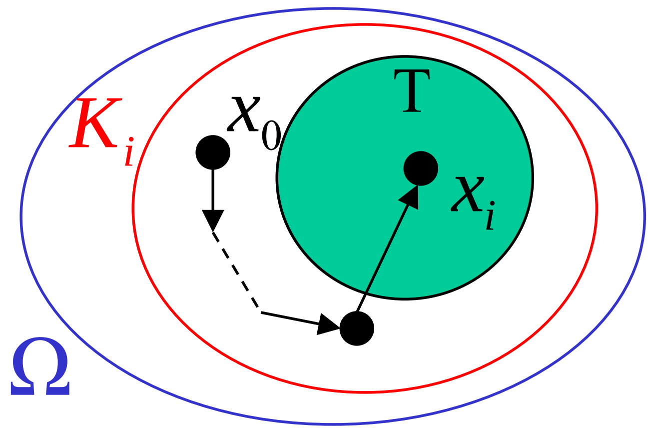
Definition

初期状態xに対してある入力uが存在してi-1ステップ間はΩに留まりiステップにTに入ることのできる集合

$$K_i(\Omega, \mathrm{T}) = \{ x_0 \in \Re^n \mid \exists \{u_k \in U\}_0^{i-1} \; \{x_k \in \Omega\}_0^{i-1}, x_i \in T \}$$

※T：target set

$T \in \Re^n$



Definition of $K_\infty(\Omega, T)$

The limit , if it exists , defines the infinite-time robust controllable set

$$K_\infty(\Omega, T) \overset{def}{=} \lim_{i \to \infty} K_i(\Omega, T)$$

3.1Robust Controllable Sets

Lemma

$K_{i+1}(\Omega, T) = K_i(\Omega, T)$ となるようなiが存在する
$\Rightarrow K_\infty(\Omega, T)$ が有限回で決定される

●Algorithm(Robust Controllable Sets)

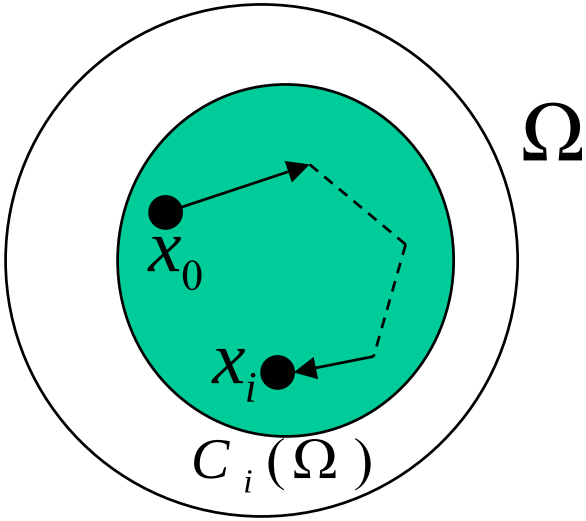
1. $K_0(\Omega, T) = T$
2. $K_{i+1}(\Omega, T) = Q(K_i(\Omega, T)) \cap \Omega$
3. If$K_{i+1}(\Omega, T) = K_i(\Omega, T)$,then terminate the algorithm
   and set $K_\infty(\Omega, T) = K_i(\Omega, T)$
   If $K_{i+1}(\Omega, T) \neq K_i(\Omega, T)$, repeat No.2

3.2 Robust Admissible Sets

Definition

初期状態xに対してある入力uが存在してiステップ間、Ωに留まり続けられる集合

$$C_i(\Omega) = \{x_0 \in \Re^n \mid \exists \{u_k \in U\}_0^{i-1} : \{x_k \in \Omega\}_0^i\}$$



●Algorithm(Robust Admissible Sets)

1. $C_i(\Omega) = K_i(\Omega, \Omega)$

2. $K_\infty(\Omega, T)$**の時と同様に**$C_{i+1}(\Omega) = C_i(\Omega)$

となったら$C_\infty(\Omega) = C_i(\Omega)$**とする**

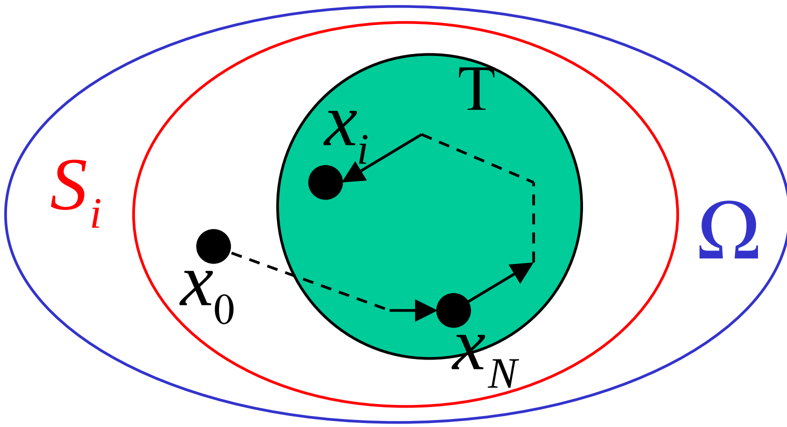
3.3Robust Stabilisable Sets

Definition

Ω内の初期状態xに対してある入力uが存在して、Nステップ以内にTに入り、iステップまでTに留まり続けられるような集合

$$S_i(\Omega, \mathrm{T}) = \{x_0 \in \Re^n \mid \exists \{u_k = h(x_k) \in U\}_0^{i-1}$$
$$N \le i : \{x_k \in \Omega_0\}_0^{N-1}, \{x_i \in T \subseteq \Omega\}_N^i, T \subseteq Q(T)\}$$

※T：target set
(robust control invariant subset of **Ω**)



Theorem

$S_{i+1}(\Omega, T) = S_i(\Omega, T)$ **となるようなiが存在する**

$\Leftrightarrow S_\infty(\Omega, T)$ **が有限回で決定される**

3.3Robust Stabilisable Sets

●Algorithm(Robust Controllable Sets)

1. $S_i(\Omega, T) = K_i(\Omega, T)$

2. If $S_{i+1}(\Omega, T) = S_i(\Omega, T)$,then terminate the algorithm

   and set $S_\infty(\Omega, T) = S_i(\Omega, T)$

   If $S_{i+1}(\Omega, T) \neq S_i(\Omega, T)$, repeat No.1

4. おわりに

本発表ではRobust Set Invariance**について説明し、**

拘束をもったシステムの初期状態集合を明らかにしました

○今後の課題

外乱のある場合のシステムについても学んでいく

Bibliography

●Robust Constrains Satisfaction: Invariance Sets and Predictive Control

Eric C.Kerrigan