姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

FL06-32-02

五十嵐裕司

ここまでの流れ

- **制御目標**　3次元姿勢整列問題(3D Alignment)

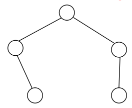
$$R_i = R_j \quad \forall i, j \quad t \to \infty$$

⇒ すべてのエージェントの姿勢が一致すること

- **解析**

(理論シンポ)　ポテンシャル関数　**相対姿勢のエネルギー関数**

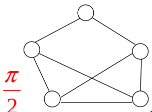
$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \phi(R_i^T R_j) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \mathrm{tr}(I_3 - R_i^T R_j)$$



仮定　グラフは無向, 固定, 連結, 木

(12/21のFLゼミ)　ポテンシャル関数　**個々のエネルギー関数**

$$V = \sum_{i=1}^{n} \phi(R_i) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \mathrm{tr}(I_3 - R_i)$$



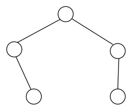
仮定　グラフは無向, 固定, 連結, ~~木~~　$-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$

本日の発表

- **解析**

(理論シンポ)　ポテンシャル関数　**相対姿勢のエネルギー関数**

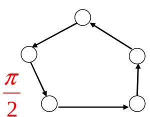
$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \phi(R_i^T R_j) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \mathrm{tr}(I_3 - R_i^T R_j)$$



仮定　グラフは無向, 固定, 連結, 木

(本日の発表)　ポテンシャル関数　**個々のエネルギー関数**

$$V = \sum_{i=1}^{n} \phi(R_i) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \mathrm{tr}(I_3 - R_i)$$



仮定　グラフは**平衡**, 固定, **強連結**, ~~木~~　$-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$

- グラフの構造と収束の速さ
- 微分ゲームとの関係

問題設定

- **各エージェントの3次元運動モデル** $(i = 1, \cdots, n)$

$$\dot{p}_i = R_i v_i \qquad (1)$$
$$\dot{R}_i = R_i \hat{\omega}_i$$

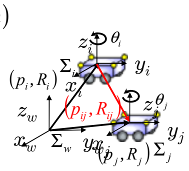
$p_i \in \mathcal{R}^3$　位置

$R_i \in SO(3)$　姿勢

$v_i \in \mathcal{R}^3$　並進速度

$\omega_i \in \mathcal{R}^3$　角速度

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}^{\wedge} := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$



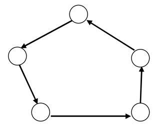
- **エージェント間の接続関係**:グラフで表す

グラフ:頂点(node)と辺(edge)で構成

頂点集合　$V := \{1, \cdots, n\}$

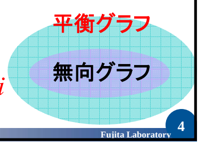
辺集合　$E \subseteq V \times V$

グラフ　$G = (V, E)$



- **仮定** (A)

グラフは**平衡**, 固定, **強連結**　$R_i > 0 \quad \forall i$



制御目的

- **仮定** (B)

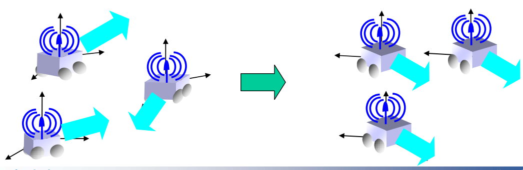
$|v_i| = 1 \quad \forall i$　すべてのエージェントの速度は定数で速さは正規化されている

- **制御目標**　3次元姿勢整列問題(3D Alignment)

$$R_i = R_j \quad \forall i, j \quad t \to \infty$$

⇓

すべてのエージェントの姿勢が一致すること



制御入力の提案

- **制御入力**

$$\omega_i = \sum_{j \in N_i} e_R(R_{ij}) \qquad (2)$$

$R_{ij} := R_i^T R_j$　相対姿勢

$$e_R(R) := \frac{1}{2}\left(R - R^T\right)^{\vee} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}^{\vee} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

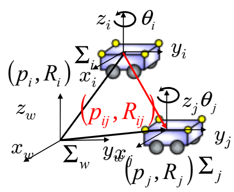
N_i : エージェント i と接続しているエージェントの集合

- **例**　2次元

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j - \theta_i) & -\sin(\theta_j - \theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_j - \theta_i) & \cos(\theta_j - \theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = e_R(R_{ij}) = \frac{1}{2}\left(R_{ij} - R_{ij}^T\right)^{\vee} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\theta_j - \theta_i) \end{bmatrix}$$



姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

証明

エネルギー関数

$$\phi(R_i) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i) \quad \dot{\phi}(R_i) = e_R^T(R_i)\omega_i^b$$

ポテンシャル関数

$$V = \sum_{i=1}^{n}\phi(R_i) := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i)$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\omega_i^b$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij}) \qquad \omega_i = \sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij})$$

合意問題の場合

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T x$$

$$\dot{V}(x) = x^T\dot{x} = y^T u$$

(12/21のFLゼミ)

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i)e_R(R_{ij})$$

グラフが無向だから $e_R^T(R_i)e_R(R_{ij})$ という項が存在すると $e_R^T(R_j)e_R(R_{ji})$ という項が必ず存在し …

証明

(12/21のFLゼミ)

$$e_R^T(R_i)\sum_{j\in \mathrm{N}_i} e_R(R_i^T R_j)$$

$$= \sum_{j\in \mathrm{N}_i} -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - R_i) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - R_j) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(\left(R_i + R_i^T\right)\left(I - R_i^T R_j\right)\right)$$

もし, A, B 準正定であるが対称でない行列の場合

$$\lambda_{\max}\left(B + B^T\right)\mathrm{tr}(A) \le \mathrm{tr}\left(\left(B + B^T\right)A\right) \le \lambda_{\max}\left(\left(B + B^T\right)\right)\mathrm{tr}(A)$$

$$\le \sum_{j\in \mathrm{N}_i} -\frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{tr}(I - R_i)}_{=\phi(R_\alpha)} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{tr}(I - R_j)}_{=\phi(R_j)} - \frac{1}{4}\lambda_{\min}\left(R_\alpha + R_i^T\right)\underbrace{\mathrm{tr}\left(I - R_i^T R_j\right)}_{=\phi(R_{ij})}$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} -\phi(R_i) + \phi(R_j) - \frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(R_i + R_i^T\right)\phi(R_i^T R_j)$$

,

証明

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\omega_i^b = \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij})$$

(12/21のFLゼミ)

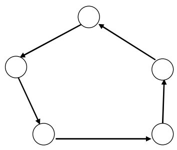
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i)e_R(R_{ij})$$

(本日のゼミ)

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{N}_i} -\phi(R_i) + \phi(R_j) - \frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(R_i + R_i^T\right)\phi(R_i^T R_j)$$

グラフが平衡だから

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{N}_i}\phi(R_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{N}_i}\phi(R_j)$$



$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{N}_i}\left(-\phi(R_i) + \phi(R_j)\right) = 0$$

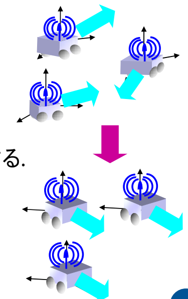
証明

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\omega_i^b = \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{N}_i} -\phi(R_i) + \phi(R_j) - \frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(R_i + R_i^T\right)\phi(R_i^T R_j)$$

$$\le -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{N}_i}\frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(R_i + R_i^T\right)\phi(R_i^T R_j)$$

$$\le 0$$



あとはラ･サールの定理を用いて収束を証明する.

- 制御目標

$$R_i = R_j \quad \forall i, j \quad t \to \infty$$

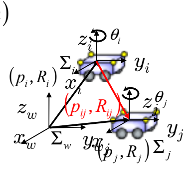
が達成される.

まとめ

- 各エージェントの3次元運動モデル$(i = 1, \cdots, n)$

$\dot{p}_i = R_i v_i$ $\qquad p_i \in \mathcal{R}^3$ 位置

$\dot{R}_i = R_i\hat{\omega}_i$ $\qquad R_i \in SO(3)$ 姿勢

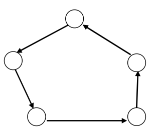


- 制御入力 $\qquad v_i \in \mathcal{R}^3$ 並進速度

$\omega_i = \sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij})$ $\qquad \omega_i \in \mathcal{R}^3$ 角速度

- 仮定

グラフは平衡, 固定, 強連結 $\quad R_i > 0 \ \forall i$



- 制御目標 3次元姿勢整列問題(3D Alignment)

$$R_i = R_j \quad \forall i, j \quad t \to \infty$$

すべてのエージェントの姿勢が一致すること

- ポテンシャル関数 $V = \sum_{i=1}^{n}\phi(R_i) := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i)$

グラフ構造と収束の速さ

- グラフの構造と収束の速さ

合意(Consensus)問題の場合

グラフラプラジアン L の**2番目に小さい固有値** $\lambda_{\min 2}(L)$ が大きいグラフ構造ほど収束が早い.

この証明のポイント

ポテンシャル関数

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \frac{1}{2}\delta^T\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha)$$

クーラン･フィッシャーの(ミニマックス)定理

$$\lambda_2(L) = \min_{\delta\perp 1}\frac{\delta^T L\delta}{\delta^T\delta}$$

$$\delta \perp 1 \Leftrightarrow \delta^T 1 = 0$$

一致する場所

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(0)$$

偏差

$$\delta_i = x_i - \alpha$$

$$\dot{\delta} = \dot{x} - \dot{\alpha}1 = \dot{x}$$

$$= -Lx = -L(x - \alpha 1)$$

$$= -L\delta$$

$$\dot{\delta} = -L\delta$$

姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

グラフ構造と収束の速さ

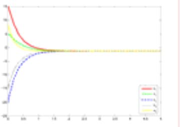
- グラフの構造と収束の速さ

  姿勢整列問題の場合

  一致する場所がわかっていないため, 直接この方法を用いることはできない.

  ⇓

  別の証明方法を考える必要がある.



- 話の流れ

  合意問題の場合の別の証明方法

  ⇓

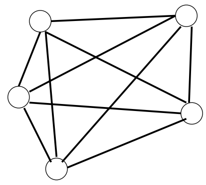
  姿勢整列問題の場合に適応

グラフ構造と収束の速さ

- 問題はポテンシャル関数の選び方

全てのエージェント間の誤差の総和を考える

$$V = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|x_i - x_j\|_2^2 = \frac{1}{2}x^T Mx$$



完全グラフ

- ポテンシャル関数の選び方のポイント

  グラフの構造に依存しない関数

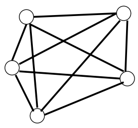
  ⇒ $V = \frac{1}{2}x^T Lx$ は不適切

  制御目標の達成と関連付けれる関数

  ⇒ $V = \frac{1}{2}x^T x$ は不適切

グラフ構造と収束の速さ

$$V = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|x_i - x_j\|_2^2 = \frac{1}{2}x^T Mx$$ を微分すると



$$M = D - A = nI - 11^T$$

$$\dot V = x^T M\dot x$$

$$= -x^T MLx$$

$$= -x^T (nI - 11^T)Lx$$

$$= -x^T (nL - 11^T L)x$$

グラフが平衡グラフであると

$$1^T L = 0$$

$$= -nx^T Lx$$

⇒ $ML = nL$

$$1 = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} n-1 & & \\ & \ddots & \\ & & n-1\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 1\\ 1 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

グラフ構造と収束の速さ

$$\dot V = x^T M\dot x$$

$$= -nx^T Lx$$

$$= -\frac{1}{n}x^T MLMx$$

$MLM = nLM = n^2 L$

$MLM = n^2 L \qquad L1 = 0$

$(Mx)^T 1 = x^T M^T 1 = 0 \quad \forall x$

クーラン・フィッシャーの(ミニマックス)定理

$$\lambda_{\min 2}(L) = \min_{(Mx)^T \perp 1}\frac{x^T M^T LMx}{x^T M^T Mx} \Rightarrow \lambda_{\min 2}(L)x^T M^T Mx \le x^T M^T LMx$$

$$\le -\frac{1}{n}\lambda_{\min 2}(L)x^T MMx$$

$$= -\lambda_{\min 2}(L)x^T Mx$$

$$= -2\lambda_{\min 2}(L)V$$

$$V(t) = V(0)e^{-2\lambda_{\min 2}(L)t}$$

$$MM = (nI - 11^T)(nI - 11^T)$$

$$= n^2 I - 2n11^T + 11^T 11^T$$

$$= n^2 I - 2n11^T + n11^T$$

$$= n(nI - 11^T)$$

$$= nM$$

グラフ構造と収束の速さ

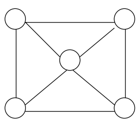
$$\dot V = x^T M\dot x \qquad V = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|x_i - x_j\|_2^2 = \frac{1}{2}x^T Mx$$

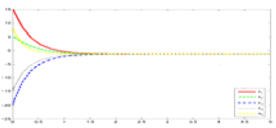
$$\le -2\lambda_{\min 2}(L)V$$

一致する場所がわかっていなくても
収束の速さを議論することはできる

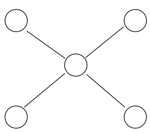
比較定理より

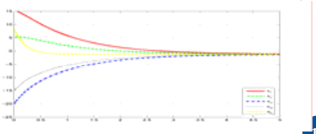
$V(t) \le V(0)e^{-2\lambda_{\min 2}(L)}$ $\quad \lambda_{\min 2}(L)$ ⇒ 収束が早い





$\lambda_{\min 2}(L) = 3$





$\lambda_{\min 2}(L) = 1$

グラフ構造と収束の速さ

- 話の流れ

  合意問題の場合の別の証明方法

  ⇓

  姿勢整列問題の場合に適応

  全てのエージェント間の誤差の総和を考える

- 準備

  回転行列 R_i, R_j が正定行列ならば以下の不等式が成り立つ

$$\frac{1}{2}\phi(R_i^T R_j) \le \phi(R_i) + \phi(R_j)$$

⇕

$$\frac{1}{2}\|x_i - x_j\|_2^2 \le \|x_i\|_2^2 + \|x_j\|_2^2$$

証明の考えも同じ

姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

グラフ構造と収束の速さ

Tokyo Institute of Technology

$\frac{1}{2}\|x_i - x_j\|_2^2 \le \|x_i\|_2^2 + \|x_j\|_2^2$ の証明

$$\|x_i - x_j\|_2^2 = (x_i - x_j)^T (x_i - x_j) = x_i^T x_i - 2x_i^T x_j + x_j^T x_j$$

$$\|x_i + x_j\|_2^2 = (x_i + x_j)^T (x_i + x_j) = x_i^T x_i + 2x_i^T x_j + x_j^T x_j \ \ge 0$$

$$-2x_i^T x_j \le x_i^T x_i + x_j^T x_j$$

$$\|x_i - x_j\|_2^2 = x_i^T x_i - 2x_i^T x_j + x_j^T x_j \le 2x_i^T x_i + 2x_j^T x_j$$

$$\frac{1}{2}\|x_i - x_j\|_2^2 \le \|x_i\|_2^2 + \|x_j\|_2^2$$

対応関係

$$\|x_i - x_j\|_2^2 \Leftrightarrow \phi(R_i^T R_j)$$

$$\|x_i + x_j\|_2^2 \Leftrightarrow \phi(R_i R_j)$$

$$\|x_i\|_2^2 \Leftrightarrow \phi(R_i)$$

$$\|x_j\|_2^2 \Leftrightarrow \phi(R_j)$$

$$\frac{1}{2}\|x_i - x_j\|_2^2 \le \|x_i\|_2^2 + \|x_j\|_2^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2}\phi(R_i^T R_j) \le \phi(R_i) + \phi(R_j)$$

グラフ構造と収束の速さ

Tokyo Institute of Technology

$$\mathrm{tr}(I - R_i^T R_j)$$

ロドリゲスの公式

$$\phi(R_i) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i)$$

$$R_i = e^{\theta_i \hat{\xi}_i} = \mathrm{I} + \sin\theta_\mathrm{i}\hat{\xi}_i + (1 - \cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2$$

を使うと

$$\mathrm{tr}(I - R_i^T R_j) = \mathrm{tr}(I - R_i) + \mathrm{tr}(I - R_j) + \mathrm{tr}(\sin\theta_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{j}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j) - \mathrm{tr}((1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2)$$

同様に

$$\mathrm{tr}(I - R_i R_j) = \mathrm{tr}(I - R_i) + \mathrm{tr}(I - R_j) - \mathrm{tr}(\sin\theta_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{j}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j) - \mathrm{tr}((1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2)$$

$$\ge 0$$

$$\mathrm{tr}(\sin\theta_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{j}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j) \le \mathrm{tr}(I - R_i) + \mathrm{tr}(I - R_j) - \mathrm{tr}((1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2)$$

$$\ge 0$$

グラフ構造と収束の速さ

Tokyo Institute of Technology

よって

$$\mathrm{tr}(I - R_i^T R_j) = \mathrm{tr}(I - R_i) + \mathrm{tr}(I - R_j) + \mathrm{tr}(\sin\theta_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{j}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j) - \mathrm{tr}((1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2)$$

$$\le 2\mathrm{tr}(I - R_i) + 2\mathrm{tr}(I - R_j) \underbrace{-2\mathrm{tr}((1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2)}_{\le 0}$$

$$\le 2\mathrm{tr}(I - R_i) + 2\mathrm{tr}(I - R_j)$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(I - R_i^T R_j) \le \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - R_i) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - R_j) \quad \phi(R_i) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i)$$

$$\frac{1}{2}\phi(R_i^T R_j) \le \phi(R_i) + \phi(R_j)$$

が成り立つ.

グラフ構造と収束の速さ

Tokyo Institute of Technology

- 姿勢整列問題においても, 収束の速さがグラフラプラジアンの2番目に小さい固有値 $\lambda_{\min 2}(L)$ に依存することの証明

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{\phi}(R_i) = \sum_{i=1}^n e_R^T(R_i)\omega_i^b \qquad \lambda_{\min}(R_i + R_i^T) = 2\cos\theta_i(t)$$

$$\le -\sum_{i=1}^n \sum_{j\in \mathrm{N}_i} \frac{1}{2}\lambda_{\min}(R_i + R_i^T)\phi(R_i^T R_j)$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in N_i} \phi(R_i^T R_j) \qquad \varepsilon := \min_{i,t}\cos\theta_i(t)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in N_i} \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - R_i^T R_j)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{4}\mathrm{tr}(R^T(L\otimes I)R) \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

グラフ構造と収束の速さ

Tokyo Institute of Technology

- 姿勢整列問題においても, 収束の速さがグラフラプラジアンの2番目に小さい固有値 $\lambda_{\min 2}(L)$ に依存することの証明

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{\phi}(R_i) = \sum_{i=1}^n e_R^T(R_i)\omega_i^b \qquad \lambda_{\min}(R_i + R_i^T) = 2\cos\theta_i(t)$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{4}\mathrm{tr}(R^T(L\otimes I)R) \qquad \varepsilon := \min_{i,t}\cos\theta_i(t)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{4n^2}\mathrm{tr}(R^T(MLM\otimes I)R) \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{4n^2}\mathrm{tr}(R^T(M\otimes I)(L\otimes I)(M\otimes I)R)$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{4n^2}\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\mathrm{tr}(R^T(M\otimes I)(M\otimes I)R)$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{4n}\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\mathrm{tr}(R^T(M\otimes I)R)$$

グラフ構造と収束の速さ

Tokyo Institute of Technology

- 姿勢整列問題においても, 収束の速さがグラフラプラジアンの2番目に小さい固有値 $\lambda_{\min 2}(L)$ に依存することの証明

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{\phi}(R_i) = \sum_{i=1}^n e_R^T(R_i)\omega_i^b \qquad \lambda_{\min}(R_i + R_i^T) = 2\cos\theta_i(t)$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{4n}\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\mathrm{tr}(R^T(M\otimes I)R) \qquad \varepsilon := \min_{i,t}\cos\theta_i(t)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi(R_i(t)) - \sum_{i=1}^n \phi(R_i(0)) \le \int_0^t -\frac{\varepsilon}{4n}\lambda_{\min 2}(L)\mathrm{tr}(R(\tau)^T(M\otimes I)R(\tau))d\tau$$

ここで

$$\frac{1}{2}\phi(R_i^T R_j) \le \phi(R_i) + \phi(R_j) \quad \text{より} \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(R_i^T R_j) \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(R_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(R_j)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}(R^T MR) \le 2n\sum_{i=1}^n \phi(R_i) \quad \text{が成り立つ}$$

姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

グラフ構造と収束の速さ

- 姿勢整列問題においても, 収束の速さがグラフラプラジアンの2番目に小さい固有値 $\lambda_{\min 2}(L)$ に依存することの証明

$$\dot V = \sum_{i=1}^{n} \dot\phi(R_i) = \sum_{i=1}^{n} e_R^T(R_i)\omega_i^b \qquad \lambda_{\min}\left(R_i + R_i^T\right) = 2\cos\theta_i(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(t)) - \sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0)) \le \int_0^t -\frac{\varepsilon}{4n}\lambda_{\min 2}(L)\mathrm{tr}(R(\tau)^T(M\otimes I)R(\tau))d\tau$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}(R^TMR) \le 2n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i) \text{ より} \qquad \varepsilon := \min_{i,t}\cos\theta_i(t) \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{tr}(R(t)^T(M\otimes I)R(t)} \le 4n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0))$$

$$-\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\varepsilon\int_0^t \underline{\mathrm{tr}(R(\tau)^T(M\otimes I)R(\tau)}d\tau$$

グラフ構造と収束の速さ

$$\underline{\mathrm{tr}(R(t)^T(M\otimes I)R(t)} \le 4n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0))$$

$$-\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\varepsilon\int_0^t \underline{\mathrm{tr}(R(\tau)^T(M\otimes I)R(\tau))}d\tau$$

グロンウォール・ベルマン不等式

$$\alpha(t) \le \gamma(t) + \int_s^t \beta(\tau)\alpha(\tau)d\tau \qquad (s<t)$$

$$\Rightarrow \alpha(t) \le \gamma(t) + \int_s^t \beta(\tau)\gamma(\tau)\exp\left\{\int_\tau^t \beta(d\sigma)d\sigma\right\}d\tau$$

$$\alpha(t) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(R(t)^T(M\otimes I)R(t)$$

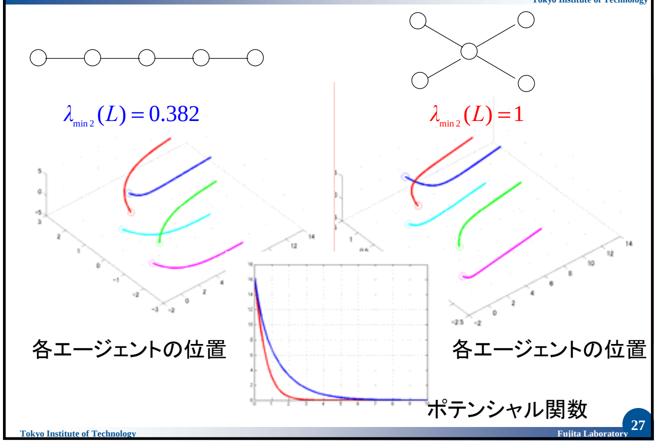
$$\gamma(t) \Leftrightarrow 4n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0)) \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\beta(t) \Leftrightarrow -\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\varepsilon$$

$$\mathrm{tr}(R(t)^T(M\otimes I)R(t) \le 4n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0))e^{-\lambda_{\min 2}(L)\varepsilon t} \qquad \varepsilon := \min_{i,t}\cos\theta_i(t)$$

$\lambda_{\min 2}(L)$ ➡ 収束が早い

シミュレーション



まとめ

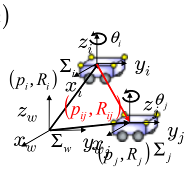
- 各エージェントの3次元運動モデル $(i = 1,\cdots,n)$

$$\dot p_i = R_i v_i \qquad p_i \in \mathcal{R}^3 \quad \text{位置}$$

$$\dot R_i = R_i\hat\omega_i \qquad R_i \in SO(3) \quad \text{姿勢}$$

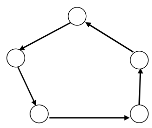
- 制御入力 $\qquad v_i \in \mathcal{R}^3$ 並進速度

$$\omega_i = \sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij}) \qquad \omega_i \in \mathcal{R}^3 \quad \text{角速度}$$



- 仮定

  グラフは平衡, 固定, 連結 $\quad R_i > 0 \ \forall i$



- 収束の速さ

$$\mathrm{tr}(R(t)^T(M\otimes I)R(t) \le 4n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0))e^{-\lambda_{\min 2}(L)\varepsilon t}$$

$\lambda_{\min 2}(L)$ ➡ 収束が早い

合意問題とゲーム理論

- 合意問題とゲーム理論

  逆最適性を使用した解析

評価関数

最適制御 ⇅ 逆最適制御

入力

$$V = x^TLx \qquad \dot x = u \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\dot V = 2x^TLu$$

$$= -kx^TL^TLx - \frac{1}{k}u^Tu + \frac{1}{k}(u+kLx)^T(u+kLx)$$

$$kx^TL^TLx + \frac{1}{k}u^Tu = \frac{1}{k}(u+kLx)^T(u+kLx) - \dot V$$

$$\int_0^\infty kx^TL^TLx + \frac{1}{k}u^Tudt = \int_0^\infty \frac{1}{k}(u+kLx)^T(u+kLx)dt - \int_0^\infty \dot V dt$$

$$\int_0^\infty kx^TL^TLx + \frac{1}{k}u^Tudt = \int_0^\infty \frac{1}{k}(u+kLx)^T(u+kLx)dt + V(0)$$

合意問題とゲーム理論

- 合意問題とゲーム理論

  逆最適性を使用した解析

$$\int_0^\infty kx^TL^TLx + \frac{1}{k}u^Tudt = \int_0^\infty \frac{1}{k}(u+kLx)^T(u+kLx)dt + V(0)$$

より $\int_0^\infty kx^TL^TLx + \frac{1}{k}u^Tudt$ を最小にする入力は

$$u = -kLx$$

である.

$$kx^TL^TLx = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j)\right)^2 \qquad u^Tu = \sum_{i=1}^{n}\left(u_i^Tu_i\right)^2$$

より

$$\int_0^\infty kx^TL^TLx + \frac{1}{k}u^Tudt = \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty\left(\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j)\right)^2 + \left(u_i^Tu_i\right)^2dt$$

姿勢整列問題に置ける収束の速さとゲーム理論との関係に関する一考察

合意問題とゲーム理論

- 合意問題とゲーム理論

逆最適性を使用した解析

$$\int_0^\infty kx^T L^T Lx + \frac{1}{k}u^T u dt = \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \left(\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j)\right)^2 + \left(u_i^T u_i\right)^2 dt$$

個々のエージェントは

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j)\right)^2 + \left(u_i^T u_i\right)^2 dt$$

近傍のエージェントの状態

を最小化していると見ることができる.

姿勢整列問題とゲーム理論

- 姿勢整列問題とゲーム理論

逆最適性を使用した解析

評価関数

最適制御 逆最適制御

入力

- 各エージェントの3次元運動モデル

$$\dot{p}_i = R_i v_i$$

$$\dot{R}_i = R_i \hat{\omega}_i$$

- ポテンシャル関数

$$V = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\phi(R_i^T R_j) := 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i^T R_j)$$

$$\dot{V} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\omega_i \qquad \omega_i = \sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij})$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\omega_i$$

姿勢整列問題とゲーム理論

- 姿勢整列問題とゲーム理論

逆最適性を使用した解析

評価関数

最適制御 逆最適制御

入力

$$\dot{V} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\omega_i$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\omega_i$$

$$= -k\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^T\omega_i + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\| k\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j) - \omega_i \right\|^2$$

$$\int_0^\infty k\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^T\omega_i dt = \int_0^\infty \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\| k\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j) - \omega_i \right\|^2 - \dot{V}dt$$

姿勢整列問題とゲーム理論

- 姿勢整列問題とゲーム理論

逆最適性を使用した解析

評価関数

最適制御 逆最適制御

入力

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty k\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right) + \frac{1}{k}\omega_i^T\omega_i dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\| k\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j) - \omega_i \right\|^2 - \underline{\dot{V}dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty k\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right) + \frac{1}{k}\omega_i^T\omega_i dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\| k\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j) - \omega_i \right\|^2 dt + \underline{V(0)dt}$$

姿勢整列問題とゲーム理論

- 姿勢整列問題とゲーム理論

逆最適性を使用した解析

評価関数

最適制御 逆最適制御

入力

よって

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty k\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right)\frac{1}{k}\omega_i^T\omega_i dt$$

を最適にする入力は

$$\omega_i = \sum_{j\in N_i} e_R(R_{ij})$$

である.

また, 個々のエージェントは

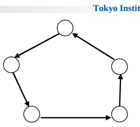
$$\int_0^\infty k\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right) + \frac{1}{k}\omega_i^T\omega_i dt$$

を最小化していると見ることができる.

まとめ

- 解析

個々のエネルギー関数



$$V = \sum_{i=1}^{n}\phi(R_i) := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_3 - R_i)$$

仮定 グラフは平衡, 固定, 強連結 $R_i > 0 \quad \forall i$

- グラフの構造と収束の速さ

$$\mathrm{tr}(R(t)^T(M\otimes I)R(t) \le 4n\sum_{i=1}^{n}\phi(R_i(0))e^{-\lambda_{\min 2}(L)\varepsilon t}$$

$\lambda_{\min 2}(L)$ ➡ 収束が早い

- 微分ゲームとの関係

個々のエージェントは

$$\int_0^\infty k\left(\sum_{j\in N_i} e_R^T(R_i^T R_j)\right)\left(\sum_{j\in N_i} e_R(R_i^T R_j)\right) + \frac{1}{k}\omega_i^T\omega_i dt$$

を最小化していると見ることができる.

付録

Tokyo Institute of Technology

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　37

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

$a \in R^{3\times 1}$　　$b \in R^{3\times 1}$　　$a^T b = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{a}\hat{b})$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad a^T b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\mathrm{tr}(\hat{a}\hat{b}) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} -a_3 b_3 - a_2 b_2 & & * \\ & -a_3 b_3 - a_1 b_1 & \\ * & & -a_2 b_2 - a_1 b_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　38

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

性質 1

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$　$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(R) - 1}{2}$　ならば回転行列 R は正定行列

証明

$$= x^T x - x^T x + \cos\theta x^T x (1-\cos\theta) x^T \xi\xi^T x$$

ロドリゲスの公式より([1],p.28)

$$R = e^{\hat{\xi}\theta} = I + \sin\theta\hat{\xi} + (1-\cos\theta)\hat{\xi}^2$$

が成り立つ. この二次形式を考えると

$$0 < \cos\theta \le 1$$

$$0 \le (1-\cos\theta) < 1$$

$$x^T R x = x^T\left(I + \sin\theta\hat{\xi} + (1-\cos\theta)\hat{\xi}^2\right)x$$

$$= x^T x + \sin\theta x^T\hat{\xi}x + (1-\cos\theta)x^T\hat{\xi}^2 x$$

$$= x^T x + (1-\cos\theta)x^T\hat{\xi}^2 x$$

$$= x^T x + (1-\cos\theta)x^T\left(\xi\xi^T - \|\xi\|_2^2 I\right)x$$

よって $x^T R x > 0$　が成り立つ回転行列は正定行列

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　39

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

$$x^T R x = x^T\left(I + \sin\theta\hat{\xi} + (1-\cos\theta)\hat{\xi}^2\right)x$$

$$= x^T x + (1-\cos\theta)x^T\left(\xi\xi^T - I\right)x$$

$$= \cos\theta x^T x + (1-\cos\theta)x^T\xi\xi^T x > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 < \cos\theta \le 1 \\ 0 \le (1-\cos\theta) < 1 \end{array}$$

よって $x^T R x > 0$　が成り立つ回転行列は正定行列

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　40

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

$R_i^T R_j$ にロドリゲスの公式を使うと

$$R_i^T R_j = \left(\mathrm{I} + \sin\theta_{\mathrm{i}}\hat{\xi}_i + (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2\right)^T\left(\mathrm{I} + \sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_j + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2\right)$$

$$= I + \sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_j + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 - \sin\theta_{\mathrm{i}}\hat{\xi}_i - \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j - \sin\theta_{\mathrm{i}}(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j^2$$

$$+ (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 + \sin\theta_{\mathrm{j}}(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_j\hat{\xi}_i^2 + (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2$$

$\mathrm{tr}(R_i^T R_j)$

$$= \mathrm{tr}\left(I + \underbrace{\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_j}_{=0} + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 \underbrace{- \sin\theta_{\mathrm{i}}\hat{\xi}_i}_{=0} - \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j \underbrace{- \sin\theta_{\mathrm{i}}(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j^2}_{=0}\right)$$

$$+ \mathrm{tr}\left((1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 + \underbrace{\sin\theta_{\mathrm{j}}(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_j\hat{\xi}_i^2}_{=0} + (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(I + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 - \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j + (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 + (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　41

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

$\mathrm{tr}(I - R_i^T R_j)$

$$= \mathrm{tr}\left(-(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 + \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j - (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 - (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

同様に

$$R_i R_j = \left(\mathrm{I} + \sin\theta_{\mathrm{i}}\hat{\xi}_i + (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2\right)\left(\mathrm{I} + \sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_j + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2\right)$$

$$= I + \sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_j + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 + \sin\theta_{\mathrm{i}}\hat{\xi}_i + \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j + \sin\theta_{\mathrm{i}}(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j^2$$

$$+ (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 + \sin\theta_{\mathrm{j}}(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_j\hat{\xi}_i^2 + (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2$$

$\mathrm{tr}(R_i R_j)$

$$= \mathrm{tr}\left(I + \underbrace{\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_j}_{=0} + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 + \underbrace{\sin\theta_{\mathrm{i}}\hat{\xi}_i}_{=0} + \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j + \underbrace{\sin\theta_{\mathrm{i}}(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j^2}_{=0}\right)$$

$$+ \mathrm{tr}\left((1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 + \underbrace{\sin\theta_{\mathrm{j}}(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_j\hat{\xi}_i^2}_{=0} + (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(I + (1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2 + \sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{j}}\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j + (1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2 + (1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　42

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

$$\mathrm{tr}(I-R_iR_j)$$
$$=\mathrm{tr}\left(-(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2-\sin\theta_i\sin\theta_j\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j-(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2-(1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

$$\mathrm{tr}(I-R_i^TR_j)$$
$$=\mathrm{tr}\left(\underbrace{-(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2}_{=\mathrm{tr}(I-R_i)}+\sin\theta_i\sin\theta_j\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j\underbrace{-(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2}_{=\mathrm{tr}(I-R_j)}-(1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$
$$=\mathrm{tr}(I-R_i)+\mathrm{tr}(I-R_j)+\mathrm{tr}\left(\sin\theta_i\sin\theta_j\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j-(1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

$$\mathrm{tr}(I-R_iR_j)$$
$$=\mathrm{tr}\left(\underbrace{-(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_j^2}_{=\mathrm{tr}(I-R_i)}-\sin\theta_i\sin\theta_j\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j\underbrace{-(1-\cos\theta_i)\hat{\xi}_i^2}_{=\mathrm{tr}(I-R_j)}-(1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$
$$=\mathrm{tr}(I-R_i)+\mathrm{tr}(I-R_j)+\mathrm{tr}\left(-\sin\theta_i\sin\theta_j\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j-(1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_j)\hat{\xi}_i^2\hat{\xi}_j^2\right)$$

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　43

クーラン・フィッシャーの(ミニマックス)定理

Tokyo Institute of Technology

クーラン・フィッシャーの(ミニマックス)定理

$\lambda_2(A)$ を A の2番目に小さい固有値とすると

$$\lambda_2(A)=\min_{x\perp u_1}\frac{x^TAx}{x^Tx}$$

が成り立つ. ここで, u_1 は一番小さい固有値に対する固有ベクトル

グラフラプラジアン L の

一番小さい固有値は　$\lambda_1(L)=0$　　$1=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$

その固有値ベクトルは　$u_1=1$

なので　$$\lambda_2(L)=\min_{x\perp 1}\frac{x^TAx}{x^Tx}\qquad x\perp 1\Leftrightarrow x^T1=0$$

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　44

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

$$-\frac{\varepsilon}{4n^2}\mathrm{tr}(R^T(M\otimes I)(L\otimes I)(M\otimes I)R)$$
$$\le-\frac{\varepsilon}{4n^2}\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})\mathrm{tr}(R^T(M\otimes I)(M\otimes I)R)$$

の証明

$$\begin{aligned}((M\otimes I)Rx)^T1_{3n}&=x^tR^T(M\otimes I)1_{3n}\\ &=x^TR^T(M\otimes I)(1_n\otimes 1_3)\\ &=x^TR^T((M1_n)\otimes(I1_3))\\ &=0\end{aligned}$$

より

$$\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})x^TR^T(M\otimes I)(M\otimes I)x\le x^TR^T(M\otimes I)(L\otimes I)(M\otimes I)x\quad\forall x$$
$$x^TR^T(M\otimes I)((L-\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})I_n)\otimes I)(M\otimes I)x\ge 0$$
$$R^T(M\otimes I)((L-\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})I_n)\otimes I)(M\otimes I)\ge 0$$

は準正定行列であることがわかる.

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　45

証明の補足

Tokyo Institute of Technology

一般的に A と B が対称行列であり, B が準正定行列ならば
以下の不等式が成り立つ

$$\lambda_i(A+B)\ge\lambda_i(B)$$

これを使うと

$$-\lambda_{\min 2}(L)\lambda_i\left(R^T(M\otimes I)(M\otimes I)R\right)=$$
$$\lambda_i\left(R^T(M\otimes I)((L-\lambda_{\min 2}(\mathrm{L})I_n)\otimes I)(M\otimes I)R-R^T(M\otimes I)(L\otimes I)(M\otimes I)R\right)$$
$$-\lambda_{\min 2}(L)\lambda_i\left(R^T(M\otimes I)(M\otimes I)R\right)\ge-\lambda_i\left(R^T(M\otimes I)(L\otimes I)(M\otimes I)R\right)$$
$$-\lambda_{\min 2}(L)\mathrm{tr}\left(R^T(M\otimes I)(M\otimes I)R\right)\ge-\mathrm{tr}\left(R^T(M\otimes I)(L\otimes I)(M\otimes I)R\right)$$

となる.

Tokyo Institute of Technology　Fujita Laboratory　46