SICE セミナー
「実践的な制御系設計の最前線
-ポストロバスト制御理論と応用の新展開-」

「モデル予測制御理論の紹介」

第 I 部

FL06_21_1

山田 照樹

はじめに

モデル予測制御の成立過程

- プロセスの現場での経験的制御
- 適応制御 (一般化予測制御) からの発展
- 最適制御 (optimal control) からの発展

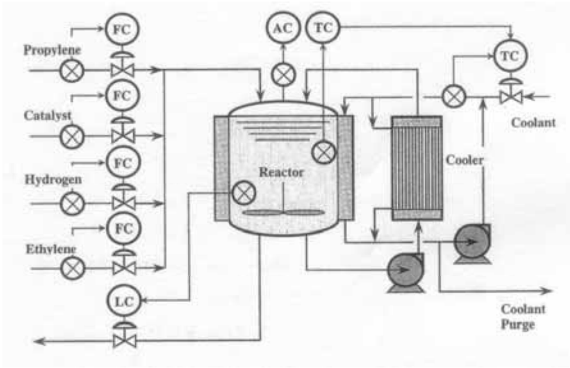


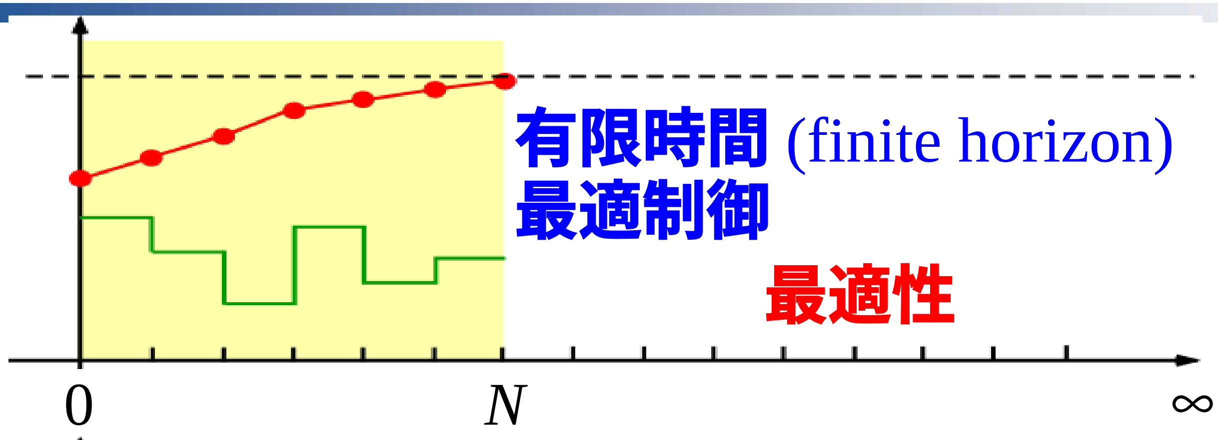
Fig : 化学プラント

大嶋, 関, “モデル予測制御-V”

有限時間区間 (finite horizon) の最適制御を, 時刻が進むにつれて評価時間区間を先へずらして進めていく

receding horizon (moving horizon)
の考え方に基づくアドバンストな最適化制御

最適制御とモデル予測制御



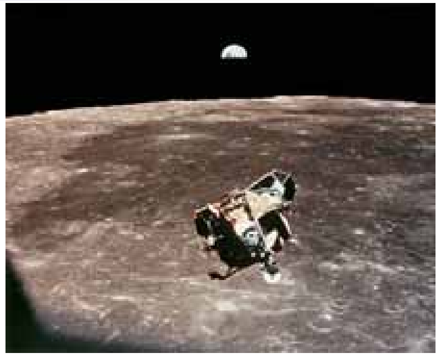
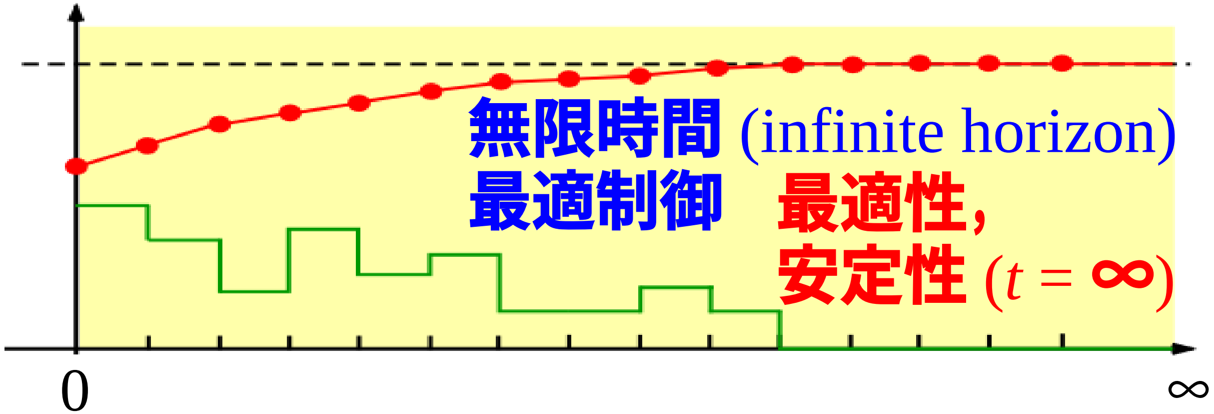


Fig : アポロ15号 “NASA”



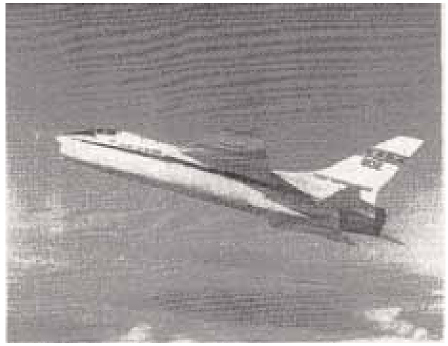
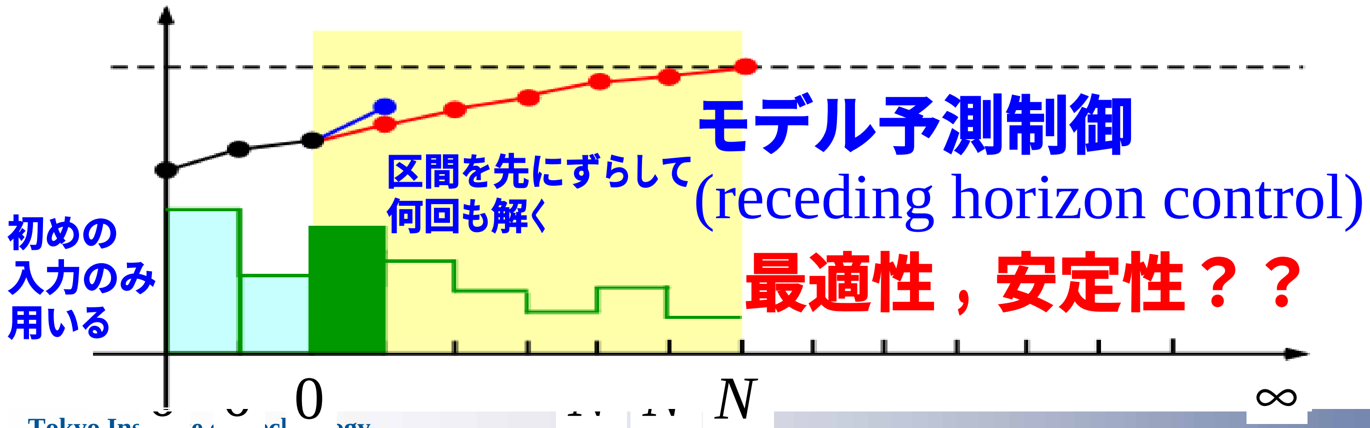


Fig : F-8 “~~[2]~~”



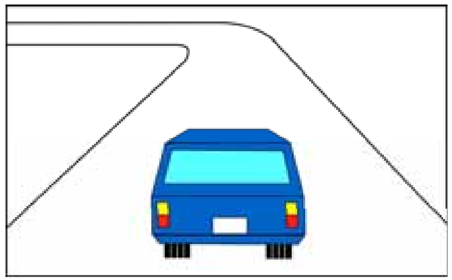


Fig : 車

モデル予測制御を適用するシステム

非線形システム（制御対象）

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (1) \qquad f(0,0) = 0$$

例 (ロボットマニピュレータ)

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

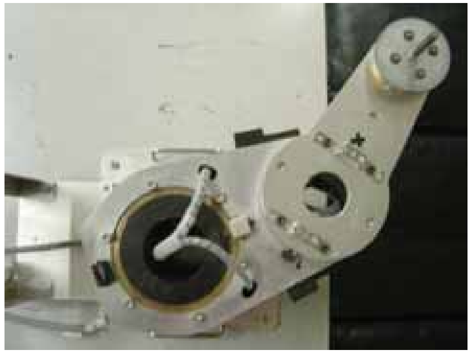


Fig ：ロボットマニピュレータ

線形システム（制御対象）

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

例 (バネマスダンパ系)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

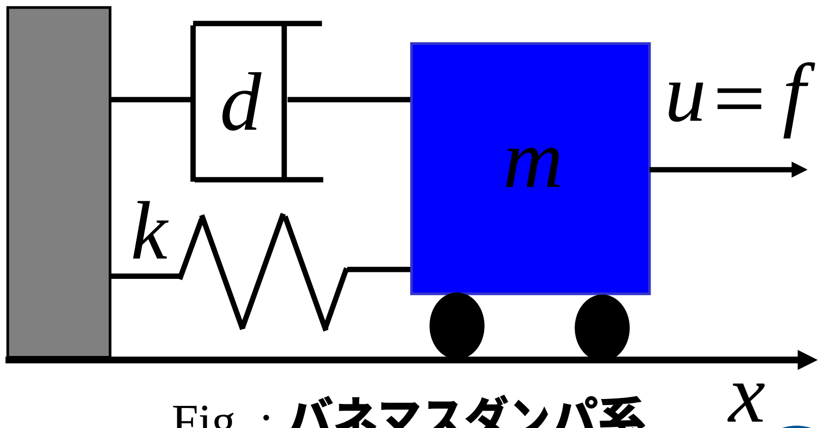


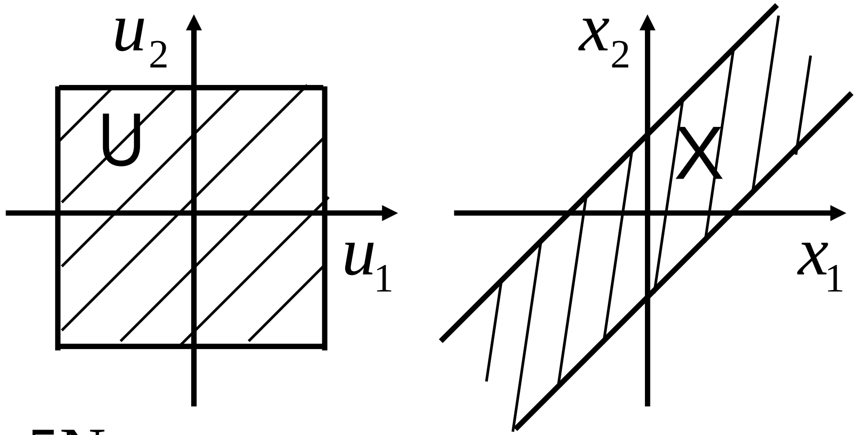
Fig ：バネマスダンパ系

入力と状態に関する制約

入力と状態に関する制約

入力制約　$u(k) \in \mathrm{U}$

状態制約　$x(k) \in \mathrm{X}$

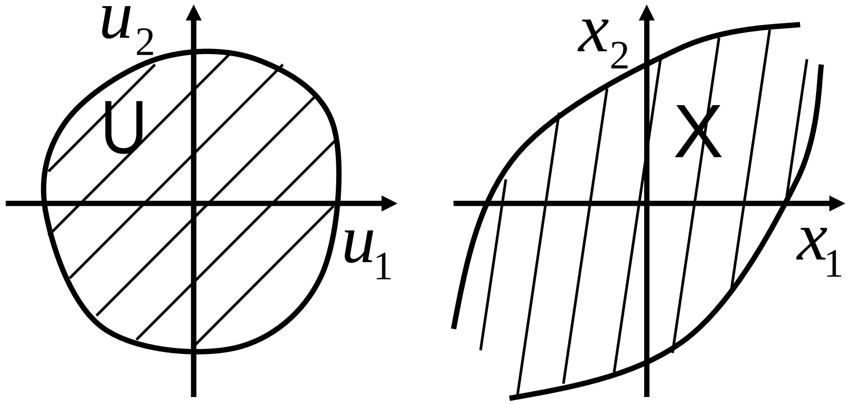


$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

例（バネマスダンパ系）

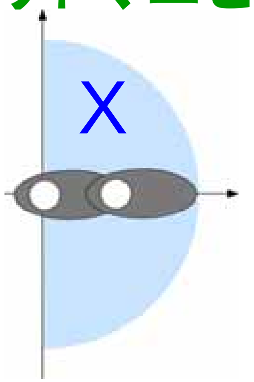
入力に関する制約U：力 –5N〜5N

状態に関する制約X：位置 –1m〜1m



$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

例 (ロボットマニピュレータ)



入力に関する制約 U：入力電圧 –10V〜10V

状態に関する制約 X：関節角度 –90°〜90°

ステージコストと終端コスト

コスト（評価関数）

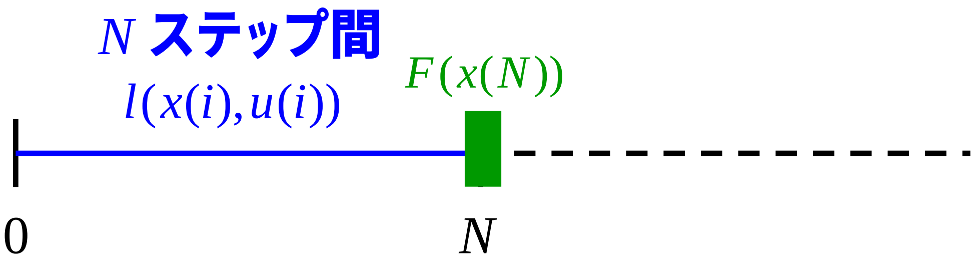
$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{l(x(i),u(i))} + \underline{F(x(N))}$$

$\underline{l(x(i),u(i))}$ ：ステージコスト (stage cost)

$\underline{F(x(N))}$ ：終端コスト (terminal cost)

$$l(x(i),u(i)) > 0,\ l(0,0) = 0,\ F(x(N)) > 0$$

有限の N ステップ区間での制御問題



例 線形システムの評価関数

ステージコスト $l(x(i),u(i)) = x(i)^T Qx(i) + u(i)^T Ru(i)$

$Q \geq 0,\ R > 0$

終端コスト $F(x(N)) = x^T(N)P_f x(N)$

制約条件つきの最適制御問題

制約条件つきの最適制御問題（optimal control problem）

$$\mathsf{P}_N(x) : \min_u \{ V_N(x,u) \mid u \in \mathsf{U}_N(x) \} \qquad (2)$$

$\mathsf{U}_N(x)$：入力と状態に関する制約を満たす入力集合

最適入力　　x：$i=0$ における状態 $x^o(0;x)$

optimal

$$u^o(x) = \{ u^o(0;x),\ u^o(1;x),\ \cdots,\ u^o(N-1;x) \} \qquad (3)$$

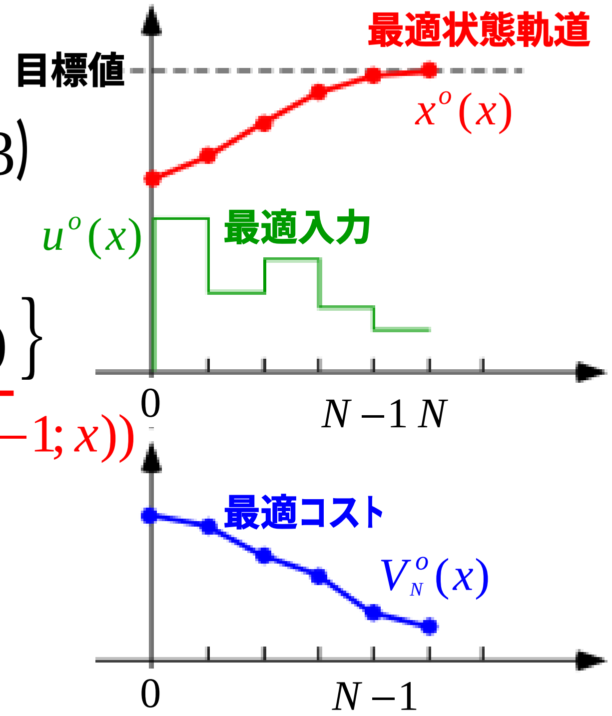
最適な状態軌道 (trajectory)

$$x^o(x) = \{ x^o(0;x),\ x^o(1;x),\ \cdots,\ x^o(N-1;x),\ x^o(N;x) \}$$

$$= f(x^o(N-1;x), u(N-1;x))$$

最適なコスト (value function)

$$V_N^o(x) = V_N(x, u^o(x))$$



モデル予測制御とは

モデル予測制御では

最適入力系列の最初の操作量 $u^o(0;x)$ のみを制御対象に適用

制御則 $\kappa_N(x) := u^o(0;x)$　　$u^o(x) = \{u^o(0;x), u^o(1;x), \cdots, u^o(N-1;x)\}$

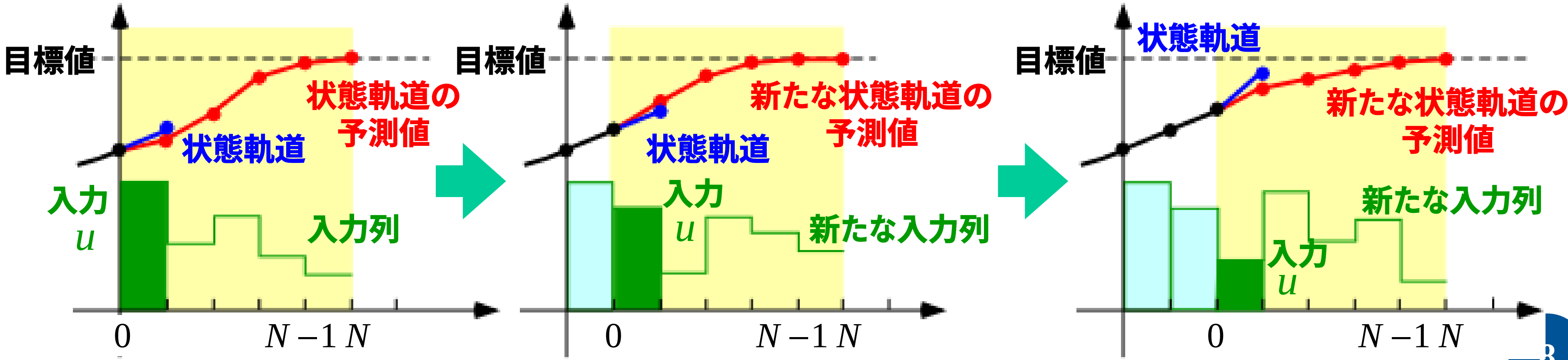
最適制御問題における N ステップの区間を一つ先に進めながら，最適制御問題を繰り返し解く．

$u = \kappa_N(x)$

という入力を繰り返しくわえる．

receding horizon (moving horizon)

モデル予測制御



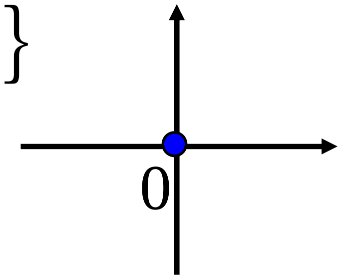
安定性のための終端制約集合と終端コスト

閉ループ系の安定性

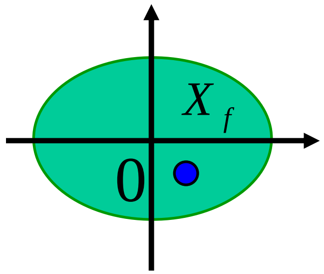
終端制約集合 X_f

終端等式制約 $x(N)=0$ Kwon and Pearson (1977)

$X_f = \{0\}$



緩和



$x(N) \in X_f$

X_f は原点近傍

安定性 → 終端制約集合 X_f

終端コスト $F(x(N))$

評価関数 $$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} l(x(i),u(i)) + \boxed{F(x(N))}$$

$$\boxed{F(x(N))} = x(N)^T P_f x(N)$$

P_f → 大

$x(N)$ → 小

安定性 → 終端コスト $F(x(N))$

線形システムの無限時間最適制御の安定性

離散時間線形システム $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

評価関数 (∞) $V_\infty(x,u)=\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{\left(x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i)\right)}_{l(x(i),u(i))}$

最適入力 (安定化制御則) $\underline{u^o(k)=Kx(k)}$ $K=-\left(R+B^T\underline{P}B\right)^{-1}B^T\underline{P}A$

代数リカッチ方程式 $\underline{P}=A^T\underline{P}A-A^T\underline{P}B\left(R+B^T\underline{P}B\right)^{-1}B^T\underline{P}A+Q$

最適コスト $V_\infty^o(k)=V_\infty(x(k),u^o(k))=x(k)^TPx(k)$

安定性
$$\begin{aligned}\Delta V_\infty^o&=V_\infty^o(k+1)-V_\infty^o(k)\\&=x(k+1)^TPx(k+1)-x(k)^TPx(k)\\&=-l\left(x(k),u(k)\right)\le 0\end{aligned}$$
(等号は $x(k)=u(k)=0$ のみ)

最適コスト $V_\infty^o(k)$ をリアプノフ関数とみれば，安定性がいえる．

最適入力 $\underline{u^o(k)=Kx(k)}$ は安定化制御則となっている．

線形システムのモデル予測制御の安定性

線形システム $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \quad x(0)=x_0$

入力制約 $u(k)\in \mathbb{U} \qquad k=0,\ldots,N-1$

状態制約 $x(k)\in \mathbb{X} \qquad k=0,\ldots,N$

終端制約 $x(N)\in \mathbb{X}_f \subset \mathbb{X}$

評価関数

$$V_N(x,u)=\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1}\left(x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i)\right)}_{\text{ステージコスト}}+\underbrace{x^T(N)P_f\,x(N)}_{\text{終端コスト}}$$

閉ループ系の安定性をいうのに重要な要素（線形システム）

- **終端制約集合** $\mathbb{X}_f$ **は最大出力許容集合** O_∞
- **終端ステップにおける安定化制御則の存在** $\kappa_f(x)=Kx$

$$K=-(R+B^TP_fB)^{-1}B^TP_fA$$

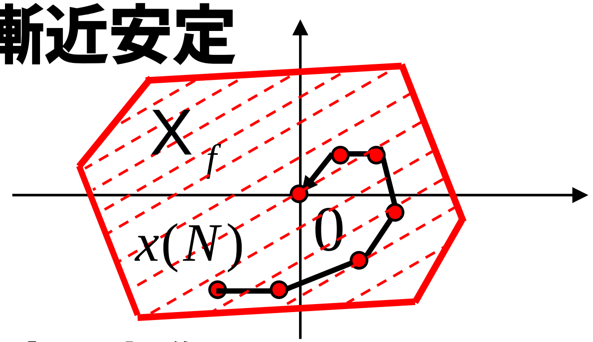
- **終端コスト** $F(x(N))=x^T(N)P_f\,x(N) \qquad \Delta F(x)+l(x,\kappa_f(x))\le 0$

＊終端制約集合の選び方

終端制約集合 $\mathcal{X}_f \longrightarrow$ **安定化制御則** $\kappa_f(x)=Kx$ **が存在する領域**

閉ループ系 $x(k+1)=(A+BK)x(k)$ **は0 に漸近安定**

1. **入力制約** $u(k)\in\mathcal{U}\quad k=0,\dots,N-1$
2. **状態制約** $x(k)\in\mathcal{X}\quad k=0,\dots,N$
3. **終端制約** $x(N)\in\mathcal{X}_f\subset\mathcal{X}$



安定化制御則 $\kappa_f(x)=Kx$

$\mathcal{X}_f$内部の状態 x に対して, 以後, 以下の条件が常に満たされている必要がある.

1. **入力制約** ➡ $K(A+BK)^k x\in\mathcal{U}\qquad k=0,1\dots,\infty$
2. **状態制約** ➡ $(A+BK)^k x\in\mathcal{X}\qquad k=0,1\dots,\infty$

終端制約集合$\mathcal{X}_f$は, 最大出力許容集合 $\mathcal{O}_\infty$ をとる.

$$\mathcal{O}_\infty=\{x\,|\,K(A+BK)^k x\in\mathcal{U},(A+BK)^k x\in\mathcal{X}\quad \text{for}\ k=0,1,\dots,\infty\}$$

$\mathcal{O}_\infty$は, 制約条件を常に満足するような最大の正の不変集合

終端制約 (terminal constraint)

終端の第 N ステップにおける状態の制約

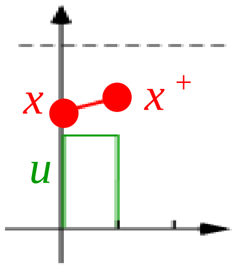
$$x(N) \in X_f \subset \mathrm{X}$$

X_f :**終端制約集合** (terminal constraint set)

仮定 : **非線形システム** (1) **に対して，(局所的な) 安定化制御則** (stabilizing control) **が存在する**

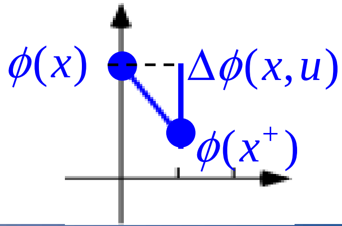
$$u = \kappa_f(x)$$

状態が x **のときに入力** u **を加えた次のステップの状態**



$$x^+ = f(x,u)$$

状態が x **から** x^+ **へ変化したときの関数** $\phi(x,u)$



$$\Delta\phi(x,u) := \phi(x^+) - \phi(x)$$

非線形モデル予測制御の安定条件

非線形モデル予測制御の安定条件

A1 : $X_f \subset \mathrm{X}$, X_f は閉集合, $0 \in X_f$

A2 : $\kappa_f(x) \in \mathrm{U}$, $^{\forall}x \in X_f$

A3 : $f(x, \kappa_f(x)) \in X_f$, $^{\forall}x \in X_f$

A4 : $[\Delta F + l](x, \kappa_f(x)) \le 0$, $^{\forall}x \in X_f$

A3 : **終端制約集合** X_f **が正の不変集合**(positive invariant set)

A4 : **終端コスト** $F(x)$ **は (局所的な) リアプノフ関数** (control Lyapunov function) **となる**

A1-A3 : **入力と状態に関する制約および終端制約が満たされている**

⬇

可能解の存在性 (feasibility)

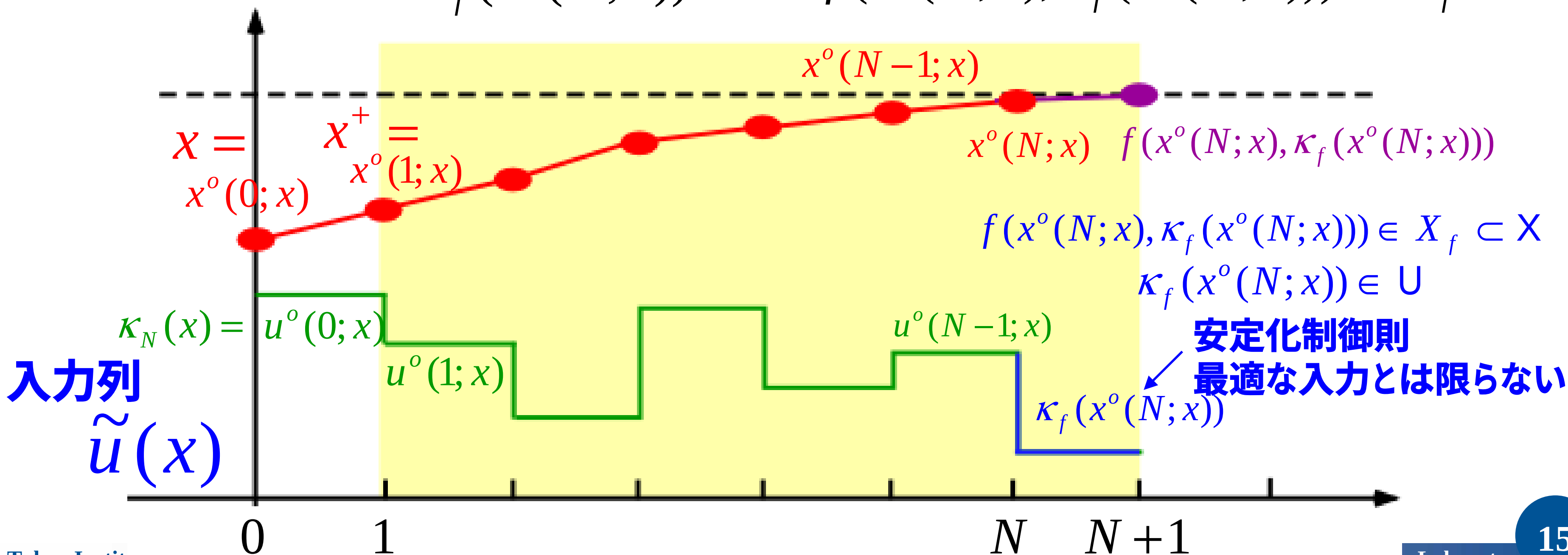
非線形モデル予測制御の安定条件の略証

最適制御問題(2)と対応する最適入力(3)に対して，
1ステップ経過した時点で新たに x^+ を初期値とする
N ステップの最適制御問題 $\mathsf{P}_N(x^+)$ を考える．

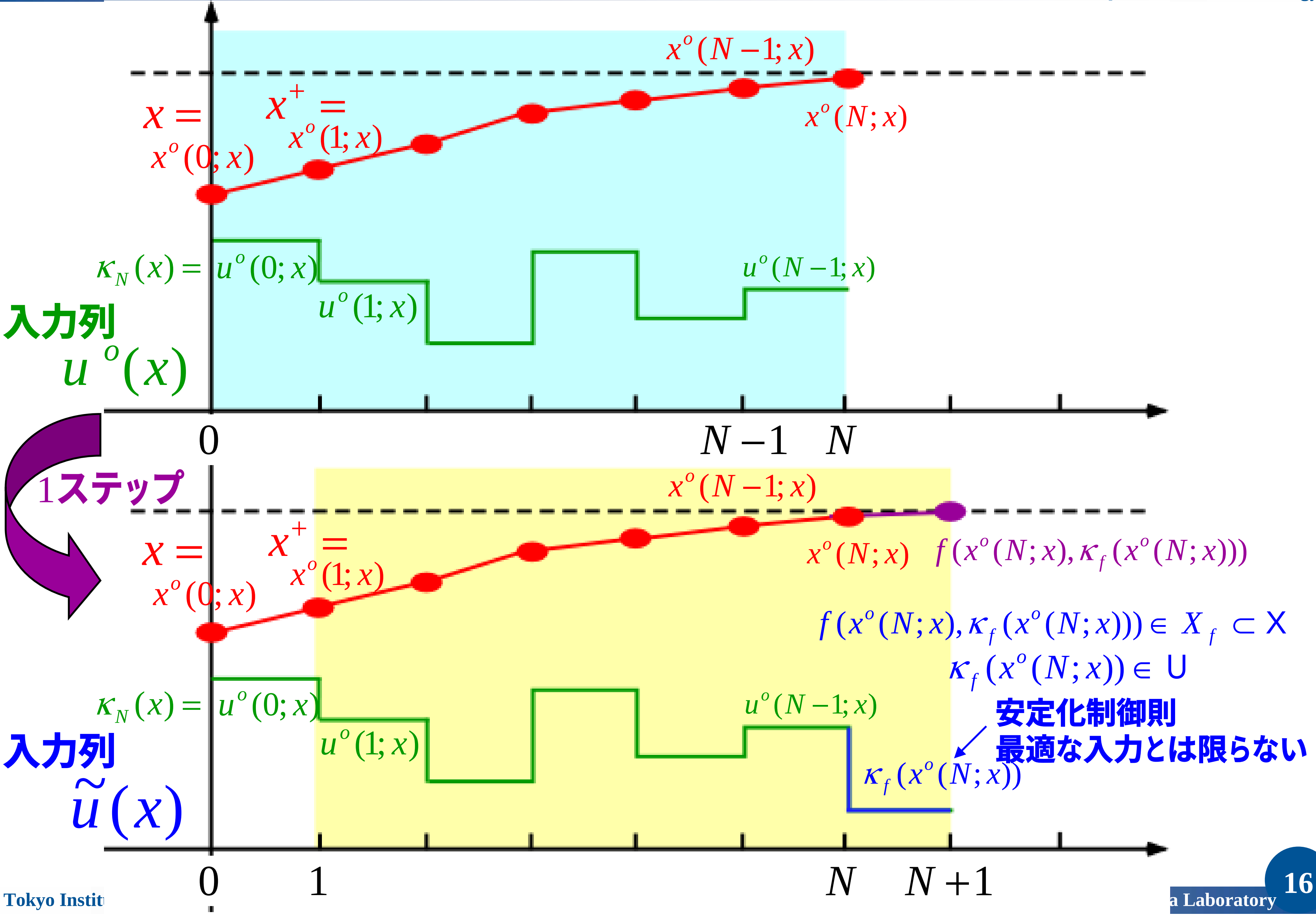
制約条件つき最適制御問題に対する入力

$$\tilde{u}(x) := \left\{ u^o(1;x), \cdots, u^o(N-1;x), \kappa_f(x^o(N;x)) \right\}$$

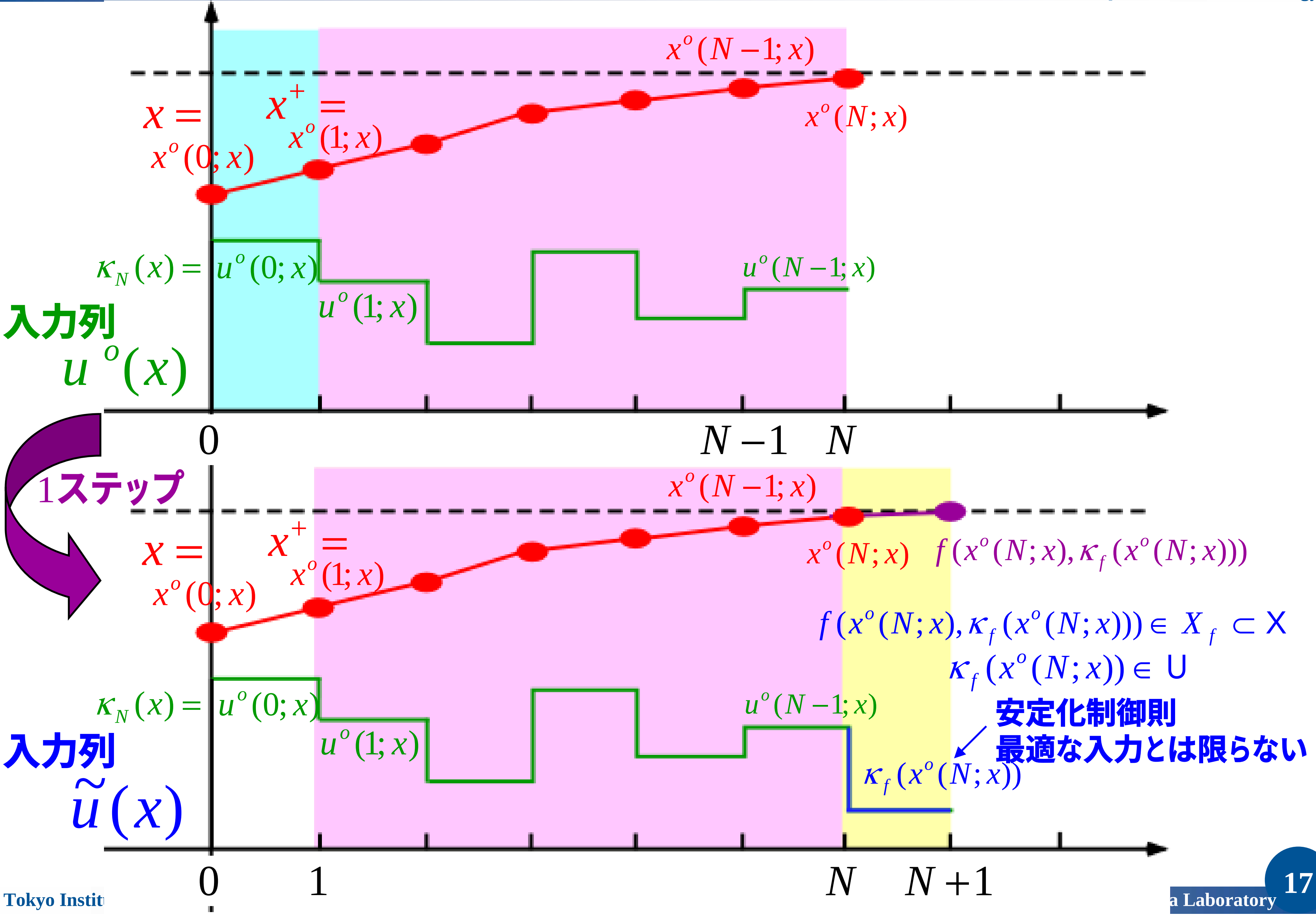
$$\kappa_f(x^o(N;x)) \in \mathbb{U} \quad f(x^o(N;x), \kappa_f(x^o(N;x))) \in X_f \subset \mathbb{X}$$



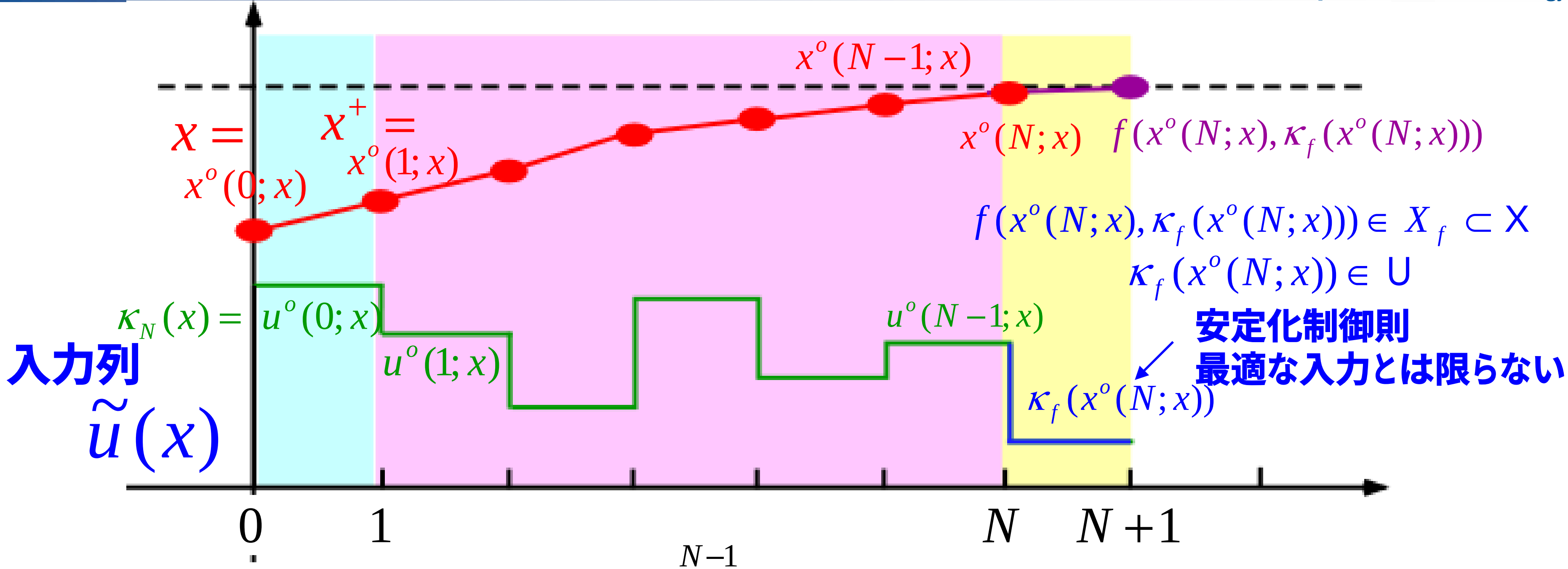
非線形モデル予測制御の安定条件の略証



非線形モデル予測制御の安定条件の略証



非線形モデル予測制御の安定条件の略証



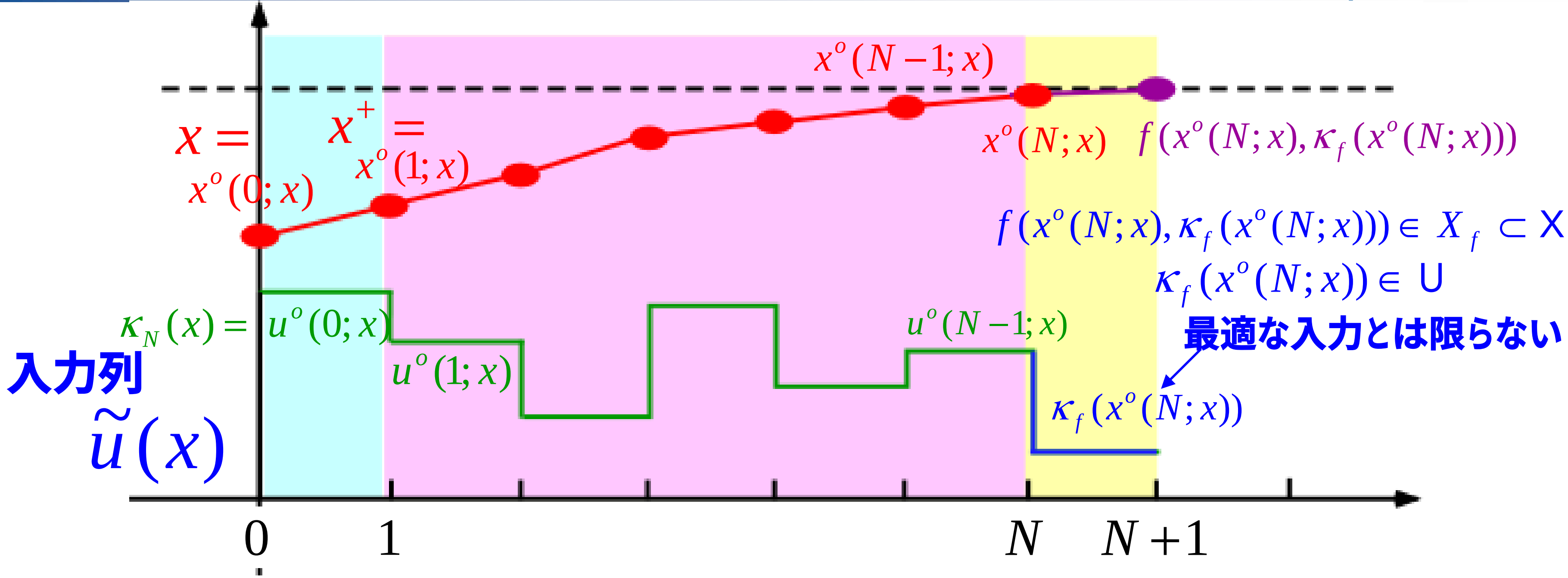
コスト（評価関数）
$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} l(x(i),u(i)) + F(x(N))$$

$$V_N(x^+,\tilde{u}(x)) = \sum_{i=0}^{N-1} l(x^o(i;x),u^o(i;x)) + F(x^o(N;x)) = V_N(x(0;x),u^o(0;x))$$

$$-l(x^o(0;x),u^o(0;x)) - F(x^o(N;x))$$

$$+l(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x))) + F(f(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x))))$$

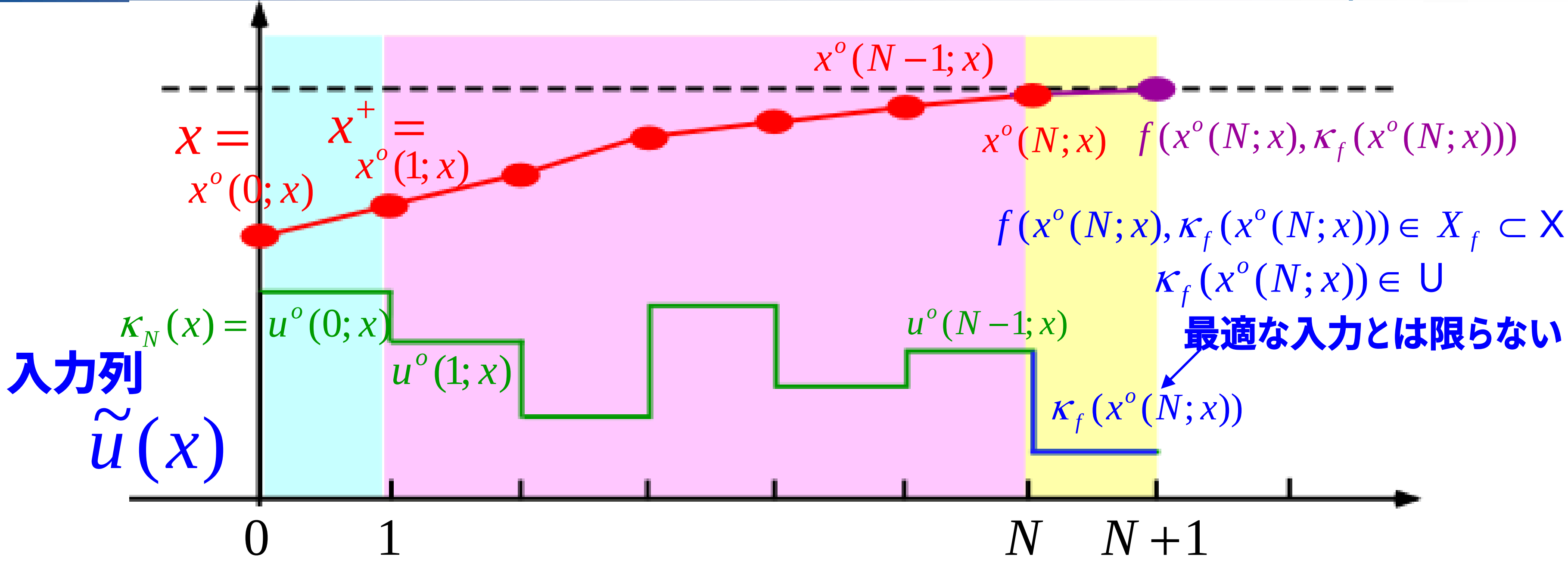
非線形モデル予測制御の安定条件の略証



$$
\begin{aligned}
V_N(x^+,\tilde{u}(x)) &= \underbrace{V_N(x(0;x),u^o(0;x))}_{=V_N^o(x)} - l(\underbrace{x^o(0;x)}_{=x},\underbrace{u^o(0;x)}_{=\kappa_N(x)}) - \underline{F(x^o(N;x))} \\
&\quad + l(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x))) + \underline{F(f(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x))))} \\
&= V_N^o(x) - l(x,\kappa_N(x)) + \underline{\Delta F(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x)))} \\
&\quad + l(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x)))
\end{aligned}
$$

$\because \Delta F(x,u) := F(x^+) - F(x)$

非線形モデル予測制御の安定条件の略証



$$V_N(x^+,\tilde{u}(x)) = V_N^o(x) - l(x,\kappa_N(x)) + \underline{\Delta F(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x)))}$$

$$\underline{+\,l(x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x)))}$$

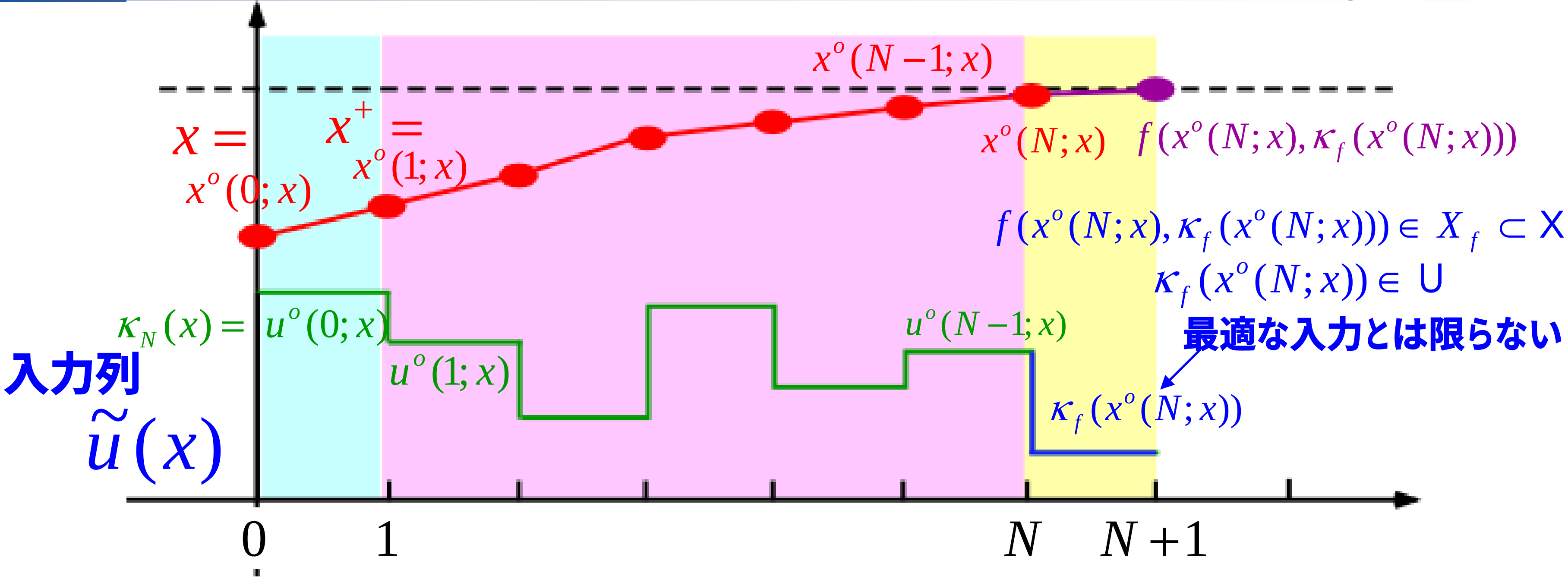
$$= V_N^o(x) - l(x,\kappa_N(x)) + \underline{[\Delta F + l](x^o(N;x),\kappa_f(x^o(N;x)))}$$

$$\leq 0$$

$$\leq V_N^o(x) - l(x,\kappa_N(x))$$

$\because$ **モデル予測制御の安定条件** A4 : $[\Delta F + l](x,\kappa_f(x)) \leq 0,\ {}^\forall x \in X_f$

非線形モデル予測制御の安定条件の略証



$$\therefore V_N(x^+,\tilde{u}(x)) \le V_N^o(x) - l(x,\kappa_N(x))$$

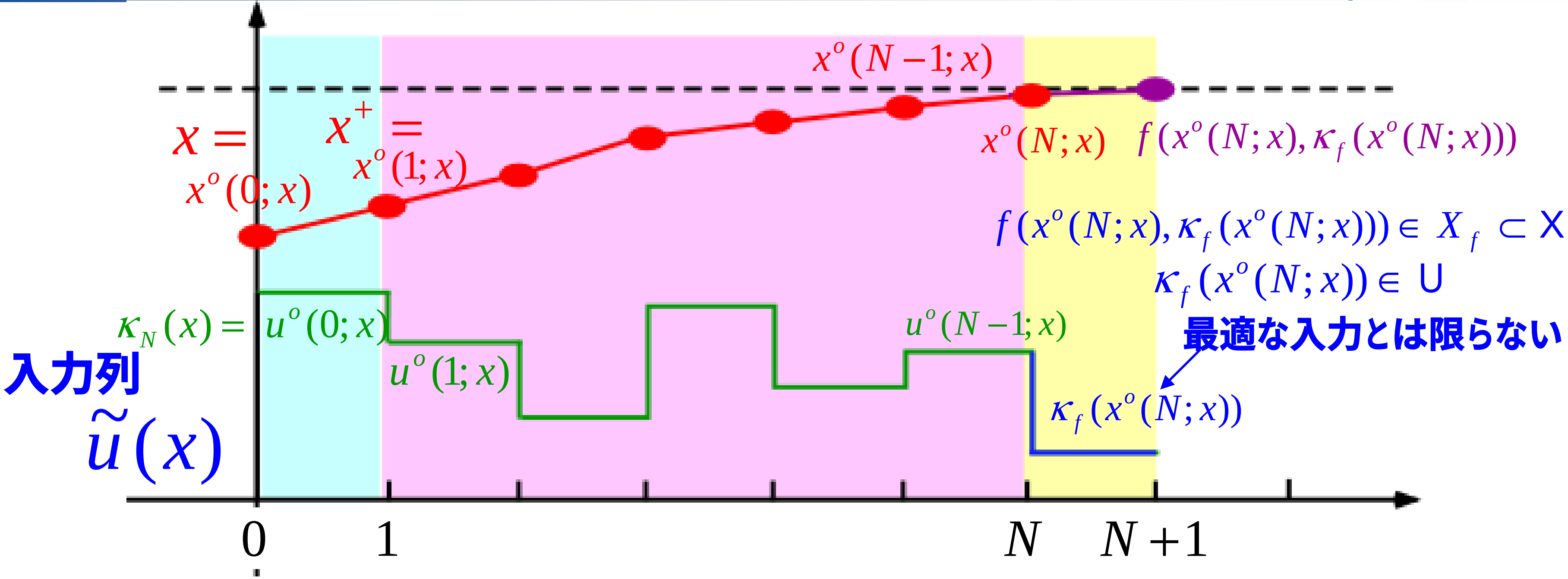
一方 $\tilde{u}(x) := \left\{u^o(1;x),\ \cdots,\ u^o(N-1;x),\ \kappa_f(x^o(N;x))\right\}$

最適入力とは限らない

$$\therefore V_N^o(x^+) \le V_N(x^+,\tilde{u}(x))$$

$$\therefore V_N^o(x^+) \le V_N(x^+,\tilde{u}(x)) \le V_N^o(x) - l(x,\kappa_N(x))$$

非線形モデル予測制御の安定条件の略証



$$\therefore V_N^o(x^+) \le V_N^o(x) - l(x, \kappa_N(x))$$

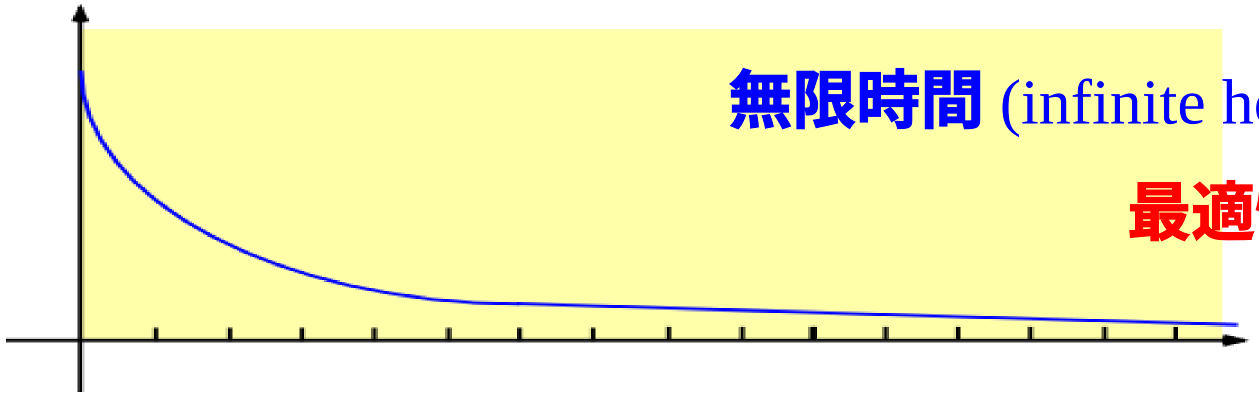
$$\Delta V_N^o(x, \kappa_N(x)) \le -l(x, \kappa_N(x)) \qquad \because \Delta V_N^o(x,u) := V_N^o(x^+) - V_N^o(x)$$

value function $V_N^o(\cdot) > 0$

value function $V_N^o(\cdot)$ をリアプノフ関数候補として用い，
時間の経過とともに $V_N^o(\cdot)$ の値が単調減少し原点 $x=0$ へ

閉ループ系の漸近安定性

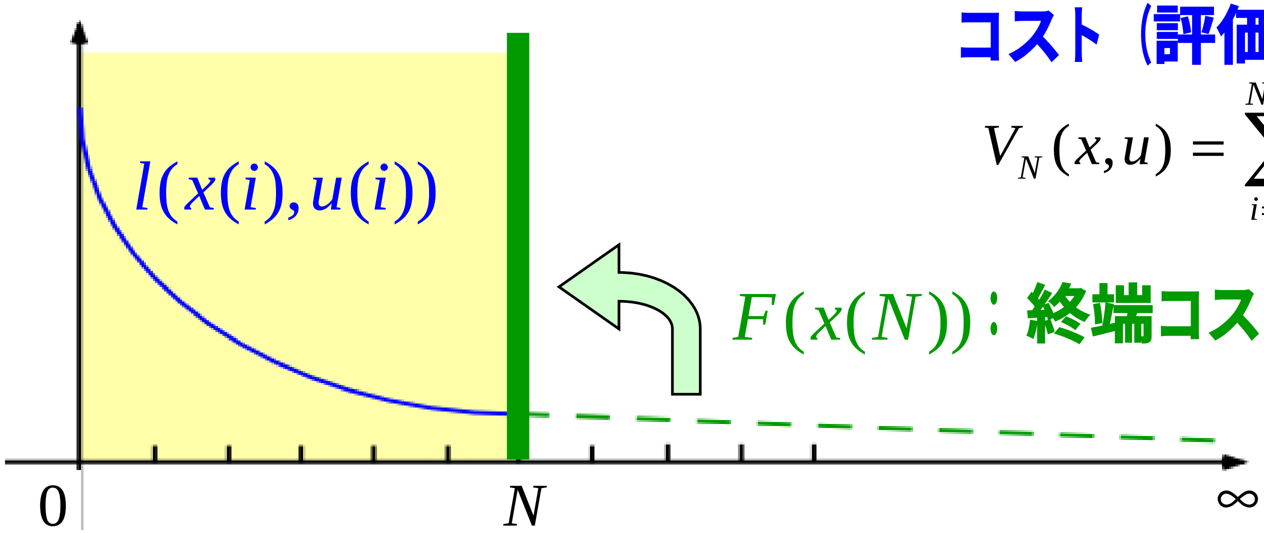
終端コストの意味づけ



無限時間 (infinite horizon) **最適制御**

最適性，安定性 ($t = \infty$)

モデル予測制御 (receding horizon control)



コスト（評価関数）

$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{l(x(i),u(i))} + \underline{F(x(N))}$$

$F(x(N))$：**終端コスト** (terminal cost)

$\underline{F(x(N))}$：$N \sim \infty$ **までのコストを込める** ➡ **無限時間最適制御の安定性**

終端コストの意味づけ

例：線形の場合

システム　$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$$y(k) = Cx(k)$$

どのように決めるのか?

評価関数

$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\{x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)\}} + \underline{x^T(N)P_f x(N)}$$

モデル予測制御の安定条件 A4 :

$[\Delta F + l](x, \kappa_f(x)) \le 0, \ {}^\forall x \in X_f$　より求められる条件である

Nステップ以降操作量は0　$\kappa_f(x)=0$ としてA4を満たす終端コストを考える

リアプノフ方程式 $A_f^T P_f A_f + Q_f = P_f$ を満たす

$$P_f = \sum_{k=0}^{\infty} (A_f^k)^T Q_f A_f^k$$

を用いると

$A_f := A + BK_f$

$Q_f := Q + K_f^T R K_f$

$\kappa_f(x) := K_f x$

＊実際にはリアプノフ方程式を直接計算する

終端コストの意味づけ

評価関数

$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1}\{x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i)\} + x^T(N)P_f x(N)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\{x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i)\} + \sum_{i=N}^{\infty}\{x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i)\}$$

$$P_f = \sum_{k=0}^{\infty}(A_f^k)^T Q_f A_f^k$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\{x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i)\}$$

0 ～ ∞ までの評価関数

つまり

終端コスト $F(x(N))$ に N ～ ∞ までのコストに込めること

無限時間 (infinite horizon) 最適制御の安定性

A. Jadbabaie, J. Yu and J. Hauser, “Unconstrained Receding-Horizon Control of Nonlinear Systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.46, No.5, pp.776-783, 2001.

終端コストに control Lyapunov function を用いる

無限時間最適制御と有限時間最適制御

離散時間線形システム $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

無限時間最適制御の評価関数

最適入力 $u^o(k) = Kx(k)$

$K = -\left(R + B^T PB\right)^{-1} B^T PA$

$$V_\infty(x,u) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)\right) + \sum_{i=N}^{\infty}\left(x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)\right)$$

$N \sim \infty$ **の最適なコスト**

モデル予測制御の評価関数

$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1}\left(x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)\right) + x(N)^T P_f x(N)$$

終端に込める!

$x(N) \in \mathbb{X}_f$ (終端制約)

制約条件

$u(k) \in \mathbb{U} \quad k = 0, \ldots, N-1$

$x(k) \in \mathbb{X} \quad k = 0, \ldots, N$

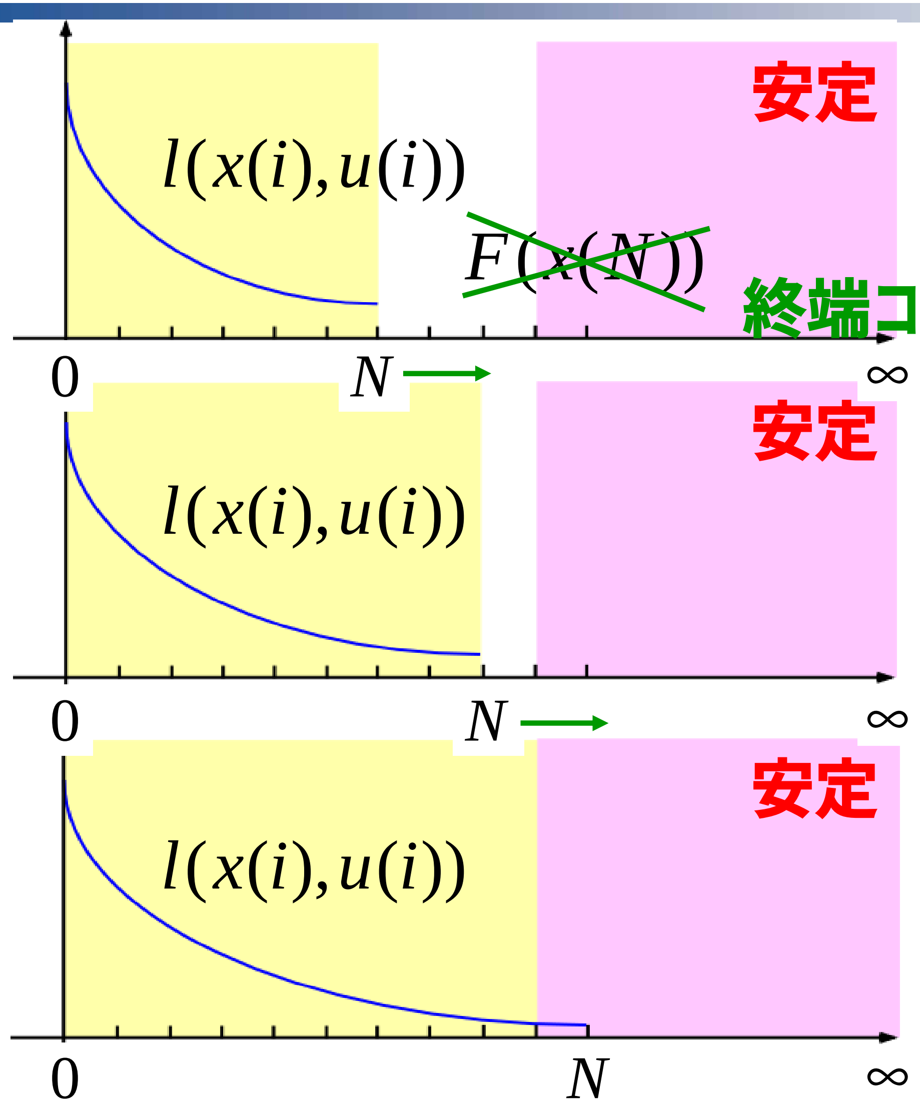
$x(N) \in \mathbb{X}_f \subset \mathbb{X}$

$\mathbb{X}_f$ **における安定化入力**

$\kappa_f(x) = Kx(k)$

$K = -\left(R + B^T P_f B\right)^{-1} B^T P_f A$

その他の安定性の証明方法



コスト（評価関数）

$$V_N(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{l(x(i),u(i))} + \underline{F(x(N))}$$

終端コストは用いない

安定性を満足するまで
Horizon **の長さをのばしていく.**

G. Grimm, M. J. Messina, S. E. Tuna and A. R. Teel, "Model Predictive Control: For Want of a Local Control Lyapunov Function, All is Not Lost," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.50, No.5, pp.546-558, 2005.

A. Jadbabaie and J. Hauser, "On the Stability of Receding Horizon Control With a General Terminal Cost," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.50, No.5, pp.674-678, 2005.

非線形モデル予測制御の応用例

- Hover Craft (**大阪大学**)
- Visual Feedback System (**東工大**)

モデル予測制御
プロセス制御の分野ではない
“速い” 制御対象への適用へ!!

Fig : Hover Craft

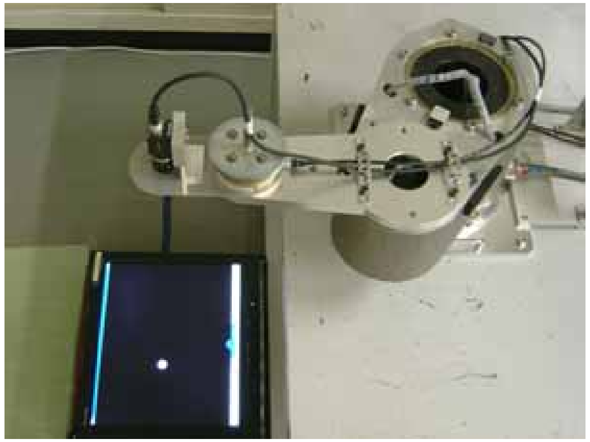


Fig : Visual Feedback System

モデル予測制御の応用例 (Hover Craft)

- Hover Craft

制御目標

推進力、移動できる範囲に制約がある条件下で Hover Craft**の位置, 姿勢を目標値に収束させる.**

Fig : Hover Craft

システム

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin x_3 & -\sin x_3 \\ \cos x_3 & \cos x_3 \\ 1/L & -1/L \end{bmatrix} u$$

状態 $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$

入力 $u = [\mathrm{u}_1,\ \mathrm{u}_2]^{\mathrm{T}}$

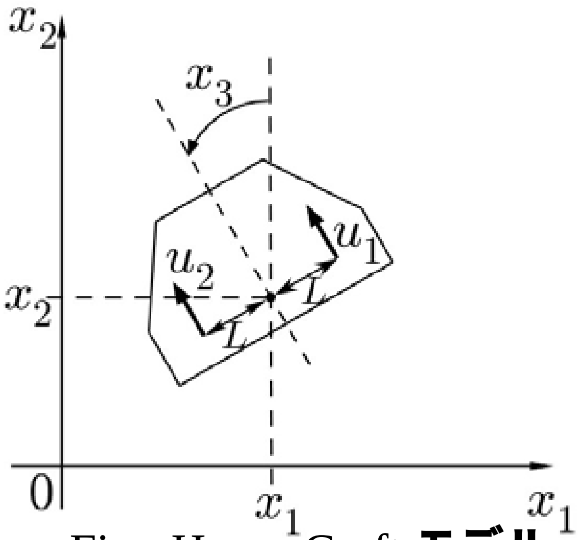


Fig : Hover Craft **モデル**

http://www-newton.mech.eng.osaka-u.ac.jp/~ohtsuka/paper/CCA02ohp_hover.pdf

T. Ohothuka and A. Kodama, “Automation Code Generation System for Nonlinear Receding Horizon Control,” **計測自動制御学会論文集**, Vol.38, No.7, pp.617-623 2002.

モデル予測制御の応用例 (Hover Craft)

入力と状態に関する制約

入力に関する制約 U ：ファンの推進力 $-u_{\max} \sim u_{\max}$

状態に関する制約 X ：移動できる範囲 $-x_{\max} \sim x_{\max}$

コスト（評価関数）

$$J = \varphi(x(T)) + \int_t^{t+T} L(x(t'), u(t'))dt'$$

$$L = \frac{1}{2}\{(p(t)-x(t))^T Q(p(t)-x(t)) + u^T u\}$$ ：ステージコスト (stage cost)

$$\varphi = \frac{1}{2}(p(t)-x(t))^T S_f (p(t)-x(t))$$ ：終端コスト (terminal cost)

$Q > 0$, $S_f > 0$

$p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ ：目標値

$T(t) = T_f(1-e^{-\alpha t})$ ：評価区間

計算アルゴリズム
C/GMRES

モデル予測制御の応用例 (Hover Craft)

http://www-newton.mech.eng.osaka-u.ac.jp/~ohtsuka/reseach.htm

モデル予測制御の応用例 (Visual Feedback Control)

- Visual Feedback Control

制御目標

視覚情報を用いて，マニピュレータの手先を観測対象の真上に一致させる．

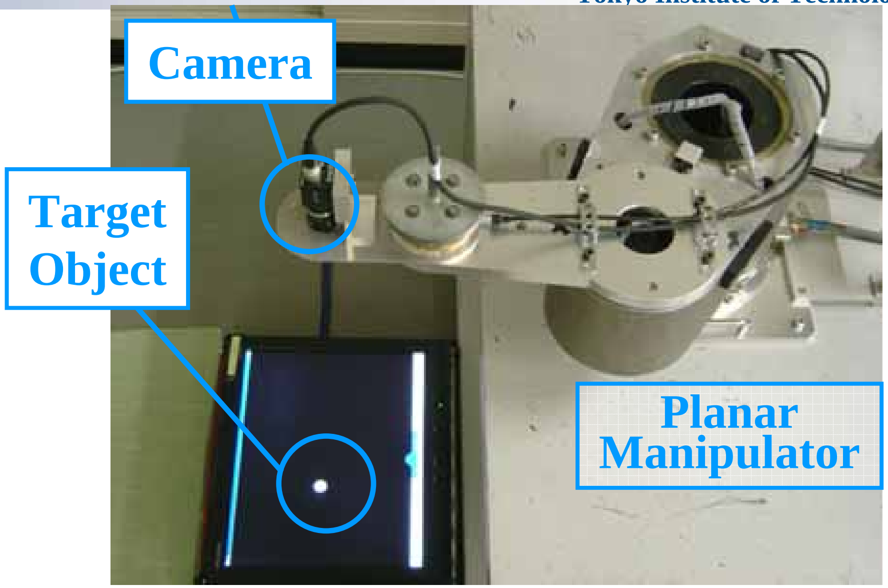


Fig : Visual Feedback System

システム

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -M^{-1}(q)C(q,\dot{q})\xi + M^{-1}(q)u \\ \dot{f} = -\dfrac{s\lambda}{z_{wo}} R_{wc}^T J_b \xi - \left(\dfrac{s\lambda}{z_{wo}} R_{wc}^T J_b \alpha J_b^T R_{wc} + R_{wc}^T \dot{R}_{wc} \right) f \end{cases}$$

$Q > 0 \quad R^{-1} > 0$

$V(x)$：エネルギー関数

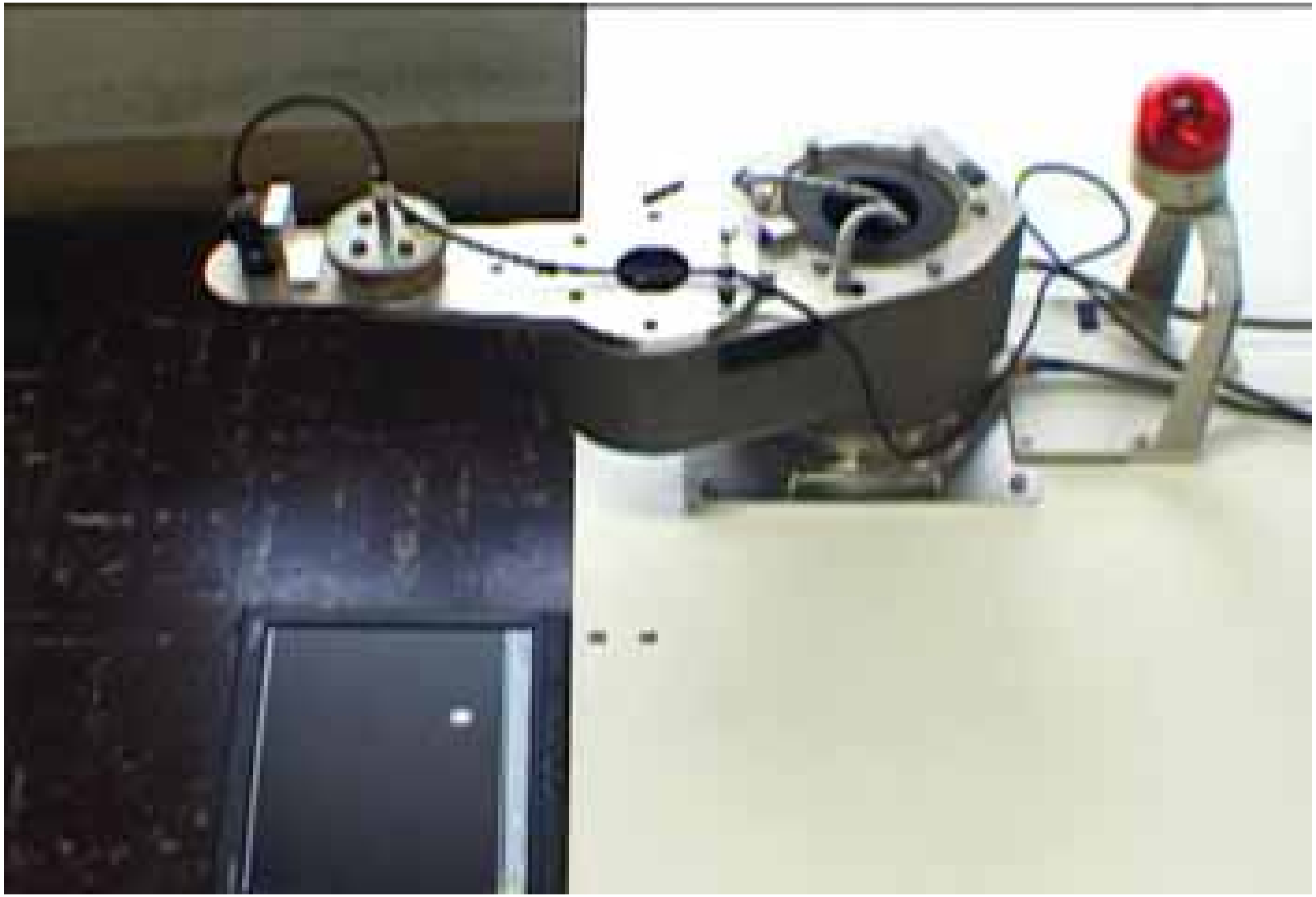
コスト（評価関数）

$$J_{RHC}(u,t) = \int_t^{t+T} l\big(x(\tau),u(\tau)\big)\, d\tau + M\big(x(t+T)\big)$$

$l\big(x(\tau),u(\tau)\big) = 4x^T Q x + u^T R^{-1} u$ ：ステージコスト (stage cost)

$M\big(x(t+T)\big) = 4V\big(x(t+T)\big)$ ：終端コスト (terminal cost)

モデル予測制御の応用例 (Visual Feedback Control)



最新のモデル予測制御の研究

最新のモデル予測制御の研究

- **非線形モデル予測制御** (nonlinear model predictive control)
- **ロバストモデル予測制御** (robust model predictive control)
- ‘**速い**’ **システム** (fast systems) **のモデル予測制御**
- **ハイブリッドシステム** (hybrid systems) **のモデル予測制御**

- Trajectory Generation
- Path Planning