

はじめに

Tokyo Institute of Technology

協調制御と分散制御

- 協調制御: 各エージェントの**目的**が他のエージェントに依存して決まる
- 分散制御: 各エージェントの**制御入力**が他のエージェントに依存して決まる

協調・分散制御の例

- 自律分散システム
- センサネットワーク
- ITS/管制
- フォーメーション制御
- ランデブー(Rendezvous)
- 合意(Consensus)**
- 群れ(Flocking) ...

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 1

合意(Consensus)問題

Tokyo Institute of Technology

エージェント(制御対象)

$$\dot{x} = u$$

$$x \in R \quad u \in R$$

エージェントモデルの例

運動学モデル(速度入力)

動的モデル

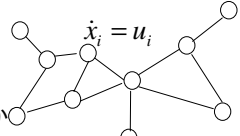
- 2重積分系 $\dot{q} = p \quad \dot{p} = u$
- 状態方程式 $\dot{x} = Ax + Bu$
- 非線形系 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 2

合意(Consensus)問題

Tokyo Institute of Technology

複数のエージェント(n 台)いる状況

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u_n \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{x}_i = u_i \quad (i=1, \dots, n) \\ x_i \in R \quad u_i \in R \end{matrix}$$


分散制御を考える上で重要なこと
どのエージェントの情報が利用できるか

グラフ: G エージェント間の結合をあらわしたもの

近傍: N_i エージェント i が利用できる情報をもつエージェントの集合

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 3

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology


グラフ理論

グラフ $G = (V(G), E(G))$:
点あるいは頂点とよばれる有限集合 $V(G)$ と、辺と呼ばれる $V(G)$ の相異なる2つの要素の非順序対集合 $E(G)$ とから構成されるもの

頂点集合 $V(G) := \{1, \dots, n\}$
辺集合 $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$

近傍 N_i : ある点の隣接点の集合

グラフの例



$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $E(G) = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,5), (4,5)\}$
 $N_1 = \{2\}$
 $N_2 = \{1, 3, 4\} \dots$

$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E(G) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$
 $N_1 = \{2\}$
 $N_2 = \{1, 3\} \dots$


Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 4

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフの種類

- 無向グラフ: グラフの辺に矢印がないグラフ
- 有向グラフ: グラフの辺に矢印があるグラフ
- 連結グラフ: ひとつにまとまったグラフ
- 平衡グラフ
- 非連結グラフ



Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 5

制御目的

Tokyo Institute of Technology

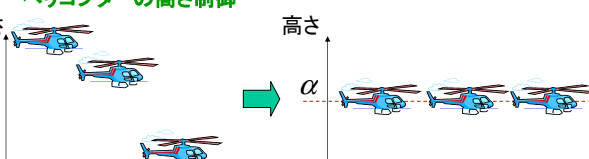
制御目的

合意(Consensus)を達成すること
すべてのエージェントの状態がある値に一致すること

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha \quad \rightarrow \quad x_i = x_j = \alpha \quad \forall i, j$$

α : 一致する場所
制御目標が周りのエージェントとの兼ね合い: **協調制御**

例 ヘリコプターの高さ制御



Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 6

制御入力

Tokyo Institute of Technology

各エージェントに加える入力(制御入力)

$$u_i = - \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j) \quad \rightarrow \quad \text{分散制御}$$

自分以外のエージェントの状態を使用
近傍のエージェントとの差

例

$$u_1 = - \sum_{j \in N_1} (x_i - x_j) = -(x_1 - x_2) \quad N_1 = \{2\}$$

$$u_2 = - \sum_{j \in N_2} (x_i - x_j) = -(x_2 - x_1) - (x_2 - x_3) - (x_2 - x_4) \quad N_2 = \{1, 3, 4\}$$

$$u_3 = - \sum_{j \in N_3} (x_i - x_j) = -(x_3 - x_2) - (x_3 - x_4) \quad N_3 = \{2, 4\}$$

$$u_4 = - \sum_{j \in N_4} (x_i - x_j) = -(x_4 - x_2) - (x_4 - x_5) \quad N_4 = \{2, 5\}$$

$$u_5 = - \sum_{j \in N_5} (x_i - x_j) = -(x_5 - x_3) - (x_5 - x_4) \quad N_5 = \{3, 4\}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 7

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフを特徴づける行列

- 隣接行列(adjacency matrix)
- 次数行列(degree matrix)
- グラフラプラシアン(graph laplacian)

隣接行列(adjacency matrix): A

$$A := a_{ij} \begin{cases} 1: \text{頂点 } i \text{ と } j \text{ が隣接している} \\ 0: \text{その他} \end{cases}$$

例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 8

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフを特徴づける行列

- 次数行列(degree matrix): D

$$D := \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

d_i : 頂点 i の次数
次数: 無向グラフの各点に辺で結ばれている頂点の個数

例

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 9

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフを特徴づける行列

- グラフラプラシアン(graph laplacian): L

$$L := D - A \quad D: \text{次数行列} \quad A: \text{隣接行列}$$

例

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 10

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフを特徴づける行列

- グラフラプラシアン(graph laplacian): L

$$L := D - A \quad D: \text{次数行列} \quad A: \text{隣接行列}$$

例

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 11

クロネッカー積

Tokyo Institute of Technology

クロネッカー積

$A \in R^{m \times n}$ $B \in R^{p \times q}$ についてクロネッカー積を次のように定義する。

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in R^{mp \times nq}$$

例

$$A \in \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1I_3 & -1I_3 & 0I_3 \\ -1I_3 & 2I_3 & -1I_3 \\ 0I_3 & -1I_3 & 2I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 12

閉ループ系

Tokyo Institute of Technology

閉ループ系

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i \\ u_i = -\sum_{j \in N_i} (x_i - x_j) \end{cases} \quad \text{すべてのエージェントについてまとめると}$$

$$\dot{x} = -Lx \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

例

$$u_1 = -\sum_{j \in N_1} (x_1 - x_j) = -(x_1 - x_2) \quad N_1 = \{2\}$$

$$u_2 = -\sum_{j \in N_2} (x_2 - x_j) = -(x_2 - x_1) - (x_2 - x_3) \quad N_2 = \{1, 3\}$$

$$u_3 = -\sum_{j \in N_3} (x_3 - x_j) = -(x_3 - x_2) \quad N_3 = \{2\}$$

$$\dot{x} = -Lx = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -Lx$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 13

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフラプラジアンの性質

★ グラフラプラジアン: L

無向グラフの場合, 準正定・対称行列となる.

$$L^T = L \quad L \geq 0$$

無向グラフの場合, 二次形式が状態の偏差の二乗和となる.

$$x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)^2 \geq 0$$

連結グラフの場合, $\text{rank } L = n - 1$

どのようなグラフにおいても, 次の式が成り立つ

$$L\bar{1} = L \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 14

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフラプラジアンの性質

例

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

無向グラフの場合, 二次形式が状態の偏差の二乗和となる.

$$x^T Lx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)^2$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 15

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフラプラジアンの性質

例

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

どのようなグラフにおいても, 次の式が成り立つ

$$L\bar{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L\bar{1} = L \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -1+2-1 \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 16

仮定

Tokyo Institute of Technology

仮定

グラフは無向, 連結, 固定

➡ グラフラプラジアン L は次のような性質を持つ

$$\text{rank } L = n - 1 \quad L \geq 0 \quad L^T = L$$

仮定の工学的な意味

- 無向: エージェントの通信が常に双方向
- 連結: 必ずどれかのエージェントと通信を行う
- 固定: 通信相手が固定

例 無向, 連結 仮定を満たさない例 有向, 非連結

孤立している

辺に向きがある

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 17

証明

Tokyo Institute of Technology

収束性

閉ループ系 $\dot{x} = -Lx$ は $t \rightarrow \infty$ で $x = \alpha [1 \ \dots \ 1]^T$ に収束する

証明

ステップ1 $V(x) \geq 0$ を決める.

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T Lx = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|x_i - x_j\|$$

と決める エージェント間の誤差

$V(x)$: 不調和関数(disagreement function) V

エージェント間の偏差が大き

↔ $V(x)$ が大きい

エージェント間の偏差が小さい

↔ $V(x)$ が小さい

$V(x) = 0$ となるのは $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$ のみ

↔ 制御目標達成

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 18

証明

ステップ2 $\dot{V}(x) \leq 0$ どうか調べる

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} \dot{x}^T Lx + \frac{1}{2} x^T L \dot{x}$$

$$= -x^T L Lx \quad \dot{x} = -Lx, \frac{\partial V(x)}{\partial x} = Lx$$

$$= -(Lx)^T Lx \leq 0$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)^T \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x}$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} x^T Lx \right) = Lx = -u \quad u = -Lx$$

したがって閉ループ系 $\dot{x} = -\nabla V(x)$

エージェントをポテンシャルの坂を下るように進めると見なすことができる。

証明

ステップ3 $\dot{V}(x) = 0$ となる x を求める

$$-(Lx)^T Lx = 0 \quad (\text{ポテンシャルの傾きが0})$$

$$Lx = 0$$

グラフが無向, 連結より $\text{rank } L = n-1$
 $L\mathbf{1} = 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$$

ステップ4 不変集合を求める

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$ のとき $u = -Lx = 0$ より $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$ が不変集合

すべてのエージェントが同じ位置に収束

Q.E.D.

証明

すべてのエージェントが同じ位置に収束 どこに?

合意(Consensus)の場所 各エージェントの初期状態の平均値

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0) \quad \text{average consensus}$$

証明 各エージェントの状態の平均値が不変であることを使う

不変量 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} [1 \dots 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} [1 \dots 1]x$

これを微分すると $\frac{1}{n} [1 \dots 1] \dot{x} \rightarrow -\frac{1}{n} [1 \dots 1] Lx = 0$

よって $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha = \alpha \quad \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$

例題1

5台のエージェント

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = u_3 \\ \dot{x}_4 = u_4 \\ \dot{x}_5 = u_5 \end{cases}$$

グラフ

接続行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

次数行列 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

グラフラプラジアン $L := D - A$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

例題1

制御入力

$$u = -Lx = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$u_1 = -\sum_{j \in N_1} (x_i - x_j) = -(x_1 - x_2) \quad N_1 = \{2\}$

$u_2 = -\sum_{j \in N_2} (x_i - x_j) = -(x_2 - x_1) - (x_2 - x_3) \quad N_2 = \{1, 3\}$

$u_3 = -\sum_{j \in N_3} (x_i - x_j) = -(x_3 - x_2) - (x_3 - x_4) \quad N_3 = \{2, 4\}$

$u_4 = -\sum_{j \in N_4} (x_i - x_j) = -(x_4 - x_3) - (x_4 - x_5) \quad N_4 = \{3, 5\}$

$u_5 = -\sum_{j \in N_5} (x_i - x_j) = -(x_5 - x_4) \quad N_5 = \{4\}$

シミュレーション1

初期状態

$$x_1(0) = 10$$

$$x_2(0) = 5$$

$$x_3(0) = -20$$

$$x_4(0) = -3.25$$

$$x_5(0) = 2.25$$

$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$

$$= \frac{1}{n} (x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0) + x_5(0))$$

$$= -1.2$$

例題2

Tokyo Institute of Technology

5台のエージェント

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = u_3 \\ \dot{x}_4 = u_4 \\ \dot{x}_5 = u_5 \end{cases}$$

グラフ

接続行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

次数行列 $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

グラフラプラジアン $L := D - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Fujita Laboratory 25

例題2

Tokyo Institute of Technology

制御入力

$$u = -Lx = - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$u_1 = -\sum_{j \in N_1} (x_i - x_j) = -(x_1 - x_2) - (x_1 - x_4) \quad N_1 = \{2, 4\}$

$u_2 = -\sum_{j \in N_2} (x_i - x_j) = -(x_2 - x_1) - (x_2 - x_3) - (x_2 - x_5) \quad N_2 = \{1, 3, 5\}$

$u_3 = -\sum_{j \in N_3} (x_i - x_j) = -(x_3 - x_2) - (x_3 - x_4) \quad N_3 = \{2, 4\}$

$u_4 = -\sum_{j \in N_4} (x_i - x_j) = -(x_4 - x_3) - (x_4 - x_5) - (x_4 - x_1) \quad N_4 = \{3, 5, 1\}$

$u_5 = -\sum_{j \in N_5} (x_i - x_j) = -(x_5 - x_4) - (x_5 - x_2) \quad N_5 = \{4, 2\}$

Fujita Laboratory 26

シミュレーション2

Tokyo Institute of Technology

初期状態

$x_1(0) = 10$
 $x_2(0) = 5$
 $x_3(0) = -20$
 $x_4(0) = -3.25$
 $x_5(0) = 2.25$

$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0) = \frac{1}{5} (10 + 5 + (-20) + (-3.25) + 2.25) = -1.2$

Fujita Laboratory 27

収束性の早さとむだ時間の許容値

Tokyo Institute of Technology

合意(Consensus)問題の性質

- 収束性の速さ
 - グラフラプラシアンの2番目に小さい固有値 λ_2 に依存する (グラフラプラシアンの1番目に小さい固有値は常に0)
 - $\|\delta(t)\| \leq \|\delta(0)\| e^{-\lambda_2 t}$ (固有値が大きいほど収束が早い)
 - $\delta(t) := x - \alpha 1$ 合意の場所までの誤差
 - α : 合意(Consensus)の場所
- むだ時間の許容値
 - エージェント間の情報のやり取りに遅れがある場合
 - $u_i(t) = -\sum_{j \in N_i} (x_i(t) - x_j(t)) \rightarrow u_i(t) = -\sum_{j \in N_i} (x_i(t - \tau) - x_j(t - \tau))$
 - τ : むだ時間
 - むだ時間の許容値 $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\lambda_{\max}}$ (固有値が大きいほど許容値が少ない)
 - グラフラプラシアンの最も大きい固有値 λ_{\max} に依存

Fujita Laboratory 28

シミュレーションの比較

Tokyo Institute of Technology

シミュレーションの比較

シミュレーション1

$\lambda_2 = 0.3820$

シミュレーション2

$\lambda_2 = 2$

グラフが変わっても合意(Consensus)の場所は変わらない
 グラフが密になるほど収束が早い

Fujita Laboratory 29

むだ時間

Tokyo Institute of Technology

しかし
 情報のやり取りにむだ時間がある場合

$\lambda_{\max} = 3.618$ $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\lambda_{\max}} \approx 0.434$

$\lambda_{\max} = 5$ $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\lambda_{\max}} \approx 0.314$

$\tau = 0.4$ の場合

収束の早さ \leftrightarrow むだ時間の影響
 トレードオフ

Fujita Laboratory 30

連続時間と離散時間の合意(Consensus)問題

Tokyo Institute of Technology

連続時間と離散時間の比較

	連続時間	離散時間
システム	$\dot{x} = u$	$x(k+1) = x(k) + u(k)$
重要な行列	グラフラプラシアン L	確率行列(ペロン行列)* P
入力	$u = -Lx$	$u(k) = -\varepsilon Lx(k)$ $\varepsilon \in (0, d_{\max}^{-1})$ d_{\max} : グラフの最大次数
合意(Consensus)の場所	平均値 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$	平均値 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$

* 確率行列 各列の要素の和が1に等しい正方の非負行列

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 31

グラフラプラシアンとペロン行列の種類

Tokyo Institute of Technology

グラフラプラシアンとペロン行列の種類

	グラフラプラシアン L	ペロン行列 P
R. O. Saber and R. M. Murray	$D - A$	$I - \varepsilon(D - A)$ $\varepsilon \in (0, d_{\max}^{-1})$
J. A. Fax and R. M. Murray	$I - D^{-1}A$	$D^{-1}A$
A. Jadbabaie, J. Lin and A. S. Morse	$I - (I + D)^{-1}(I + A)$	$(I + D)^{-1}(I + A)$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 32

その他の合意(Consensus)問題

Tokyo Institute of Technology

平均値合意(average consensus)以外の合意(Consensus)問題

	合意(Consensus)の場所	各エージェントの入力
算術的 (Arithmetic)	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$	$u_i = -\sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)$
幾何学的 (Geometric)	$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i(0)}$	$u_i = -x_i \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)$
調和的 (harmonic)	$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i(0)}}$	$u_i = x_i^2 \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)$
P 次平均 (mean of order p)	$\sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)^p}$	$u_i = -\frac{1}{p x_i^{p-1}} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 33

おわりに

Tokyo Institute of Technology

協調・分散制御が目指すところ

ダイナミクス・の複雑度 ↑

一つのエージェント (一つのシステム) → 複雑ネットワーク上のシステム (例 ロボットセンサネットワーク)

- ハイブリッドシステム
- 不確かなシステム
- 非線形システム
- など

マルチエージェントシステム

- 被覆(Coverage)
- 合意(Consensus)
- 群れ(Flocking) など

相互結合の複雑度 ↑

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 34

群れ(Flocking)

Tokyo Institute of Technology

Flock : 羊・ヤキ・鳥などの群れ, 群れをなす

Flocking : 全てのエージェントが同じ速度で動くこと



<http://www.yasukawa.com/diving/kohama5/photo.html>

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 35

群れ(Flocking)

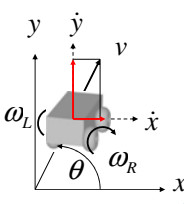
Tokyo Institute of Technology

エージェント(制御対象)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta & \dot{x} : x \text{ 軸方向の速度} & \omega : \text{角速度} \\ \dot{y} = v \sin \theta & \dot{y} : y \text{ 軸方向の速度} & v : \text{速さ} \\ \dot{\theta} = \omega & & \theta : \text{進行方向} \end{cases}$$

例 2輪車両

- d : 車輪の半径
- ω_R : 右の車輪の回転速度
- ω_L : 左の車輪の回転速度
- r : 車輪間の距離

$$v = \frac{r\omega_R + r\omega_L}{2} \quad \omega = \frac{r\omega_R - r\omega_L}{2d}$$


Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 36

群れ (Flocking)

Tokyo Institute of Technology

複数(n 台)のエージェントがいる状況

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 = v_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1 \end{cases} \dots \begin{cases} \dot{x}_n = v_n \cos \theta_n \\ \dot{y}_n = v_n \sin \theta_n \\ \dot{\theta}_n = \omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i = v_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i = \omega_i \end{cases} \quad (i=1, \dots, n)$$

例 車の縦列走行

PATH (California Partners for Advanced Transit and Highways)
<http://www.path.berkeley.edu/PATH/Publications/Videos/>

エージェント間の結合: グラフを用いる
 仮定 グラフは無向, 固定, 連結

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 37

群れ (Flocking)

Tokyo Institute of Technology

制御目的

群れ (Flocking) を達成すること

→ 全てのエージェントの速度が等しくなること

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dots = \dot{x}_n \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_i = \dot{x}_j \\ \dot{y}_i = \dot{y}_j \end{cases} \quad \forall i, j$$

制御目標が周りのエージェントとの兼ね合い: 協調制御

例c 車の縦列走行

仮定

速さは全てのエージェントに対して一定と仮定
 全てのエージェントの速度が等しくなること

→

全てのエージェントの向きが等しくなること

$$\theta_i = \theta_j \quad \forall i, j$$

姿勢整列 (Alignment)

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 38

群れ (Flocking)

Tokyo Institute of Technology

制御入力

$$\omega_i = - \sum_{j \in N_i} \sin(\theta_i - \theta_j) \Rightarrow \text{分散制御}$$

自分以外のエージェントの状態を使用
 近傍のエージェントとの差

例

$$\omega_1 = - \sum_{j \in N_1} \sin(\theta_i - \theta_j) = - \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad N_1 = \{2\}$$

$$\omega_2 = - \sum_{j \in N_2} \sin(\theta_i - \theta_j) = - \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_2 - \theta_4) \quad N_2 = \{1, 3, 4\}$$

$$\omega_3 = - \sum_{j \in N_3} \sin(\theta_i - \theta_j) = - \sin(\theta_3 - \theta_2) - \sin(\theta_3 - \theta_4) \quad N_3 = \{2, 4\}$$

$$\omega_4 = - \sum_{j \in N_4} \sin(\theta_i - \theta_j) = - \sin(\theta_4 - \theta_2) - \sin(\theta_4 - \theta_3) \quad N_4 = \{2, 3\}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 39

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

グラフを特徴づける行列

- 隣接行列 (adjacency matrix)
- 次数行列 (degree matrix)
- グラフラプラジアン (graph laplacian)
- 接続行列 (incidence matrix)

接続行列 (incidence matrix): $B \quad B := b_{ij} \begin{cases} 1: e_j = (v_i, v_k) \\ -1: e_j = (v_k, v_i) \\ 0: \text{その他} \end{cases}$

例

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} e_1 = \{1, 2\} \\ e_2 = \{2, 3\} \\ e_3 = \{2, 4\} \\ e_4 = \{3, 4\} \end{matrix}$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 40

群れ (Flocking)

Tokyo Institute of Technology

閉ループ系

全てのエージェントについてまとめると

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i = v_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i = \omega_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta & x := [x_1 \dots x_n]^T \\ \dot{y} = v \sin \theta & y := [y_1 \dots y_n]^T \\ \dot{\theta} = -B \sin(B^T \theta) & \theta := [\theta_1 \dots \theta_n]^T \end{cases}$$

$\omega_i = - \sum_{j \in N_i} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad B$: 接続行列

例

$$\omega_1 = - \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\omega_2 = - \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$\omega_3 = - \sin(\theta_3 - \theta_2) - \sin(\theta_3 - \theta_4)$$

$$\omega_4 = - \sin(\theta_4 - \theta_2) - \sin(\theta_4 - \theta_3)$$

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sin \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sin \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \theta$$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 41

グラフ理論

Tokyo Institute of Technology

グラフ理論

接続行列の性質

- 接続行列: B

どのようなグラフにおいても, 次の式が成り立つ

$$B^T \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

例

$$B^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$e_1 = \{1, 2\} \quad e_2 = \{2, 3\}$
 $e_3 = \{2, 4\} \quad e_4 = \{3, 4\}$

Tokyo Institute of Technology Fujita Laboratory 42

証明

収束性
 閉ループ系 $\dot{\theta} = -B \sin(B\theta)$ は
 $t \rightarrow \infty$ で $\theta = \alpha [1 \ \dots \ 1]^T$
 に収束する

証明
 ステップ1 $V(x) \geq 0$ を決める。
 $V = v(e^{-1^T \cos(B^T \theta)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \|v_i - v_j\|$
 エージェント間の速度誤差
 と決める。
 V : ポテンシャル関数
 $V(\theta) = 0$ となるのは $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \alpha$
 のみ \longleftrightarrow 制御目標達成

$\frac{\partial V}{\partial x} = B \sin(B^T \theta)$

Tokyo Institute of Technology
Fuji Laboratory 43

証明

証明
 ステップ2 $\dot{V}(x) \leq 0$ どうか調べる
 $\dot{V}(\theta) = \nabla V(\theta)^T \dot{\theta} = \frac{\partial V(\theta)^T}{\partial \theta} \dot{\theta}$
 $\frac{\partial V}{\partial \theta} = v \sin(B^T \theta) B^T \dot{\theta} = v \omega$
 ポテンシャル ($\because \omega = -B \sin(B^T \theta)$)
 の傾き
 したがって閉ループ系
 $\dot{\theta} = -\nabla V(\theta)$
 エージェントをポテンシャルの
 坂を下るように進める
 とも見なすことができる。
 $\dot{V}(\theta) = -\sin(B^T \theta)^T B^T B \sin(B^T \theta)$
 $= -(B \sin(B^T \theta))^T B \sin(B^T \theta) \leq 0$

$\frac{\partial V}{\partial x} = B \sin(B^T \theta)$

Tokyo Institute of Technology
Fuji Laboratory 44

証明

ステップ3 $\dot{V}(\theta) = 0$ となる θ を求める
 $-\sin(B^T \theta) B^T B \sin(B^T \theta) = 0$
 (ポテンシャルの傾きが0)
 $B \sin(B^T \theta) = 0$

接続行列の性質
 $B^T = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

より、 $t \rightarrow \infty$ で $\theta = \alpha [1 \ \dots \ 1]^T$
 に収束することが予想されるが、実は
 必ずしも収束するとは限らない
 ただし、向きを $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2} \ \forall i$
 と限定すれば $\theta = \alpha [1 \ \dots \ 1]^T$
 に収束する

$\frac{\partial V}{\partial x} = B \sin(B^T \theta)$

Tokyo Institute of Technology
Fuji Laboratory 45

例題

3台のエージェント

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 = v \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = v \cos \theta_2 \\ \dot{y}_2 = v \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_3 = v \cos \theta_3 \\ \dot{y}_3 = v \sin \theta_3 \\ \dot{\theta}_3 = \omega_3 \end{cases}$$

グラフ

接続行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ グラフラプラジアン $L := D - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 接続行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

次数行列 $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tokyo Institute of Technology
Fuji Laboratory 46

例題

制御入力

$$\omega = -B \sin(B^T \theta)$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sin \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sin \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_2 - \theta_3 \\ \theta_3 - \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = -\sum_{j \in N_1} \sin(\theta_1 - \theta_j) = -\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) \quad N_1 = \{2, 3\}$$

$$\omega_2 = -\sum_{j \in N_2} \sin(\theta_2 - \theta_j) = -\sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad N_2 = \{1, 3\}$$

$$\omega_3 = -\sum_{j \in N_3} \sin(\theta_3 - \theta_j) = -\sin(\theta_3 - \theta_1) - \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad N_3 = \{1, 2\}$$

Tokyo Institute of Technology
Fuji Laboratory 47

シミュレーション

初期状態 $(x(0), y(0), \theta(0))$

1台目 $(0, 0, \frac{\pi}{2})$ 2台目 $(5, -3, 0)$ 3台目 $(-5.3, -\frac{\pi}{2})$

Tokyo Institute of Technology
Fuji Laboratory 48

