

Synchronization 制御則のPID 型への展開に向けて

藤田研究室 米村 大輔

平成 18 年 10 月 16 日

1 はじめに

前回のゼミでは Slotine-Li 型の Synchronization 制御則を提案した [1]. しかし, まだシミュレーションや実験は行っていなかった.

そこで本レポートでは, Slotine-Li 型の Synchronization 制御則を用いた実験を通して Slotine-Li 型の Synchronization 制御則の問題点を挙げ, その改善策を考える.

2 Slotine-Li 型の Synchronization 制御

本節では, 前回のセミナーにおいて提案した Slotine-Li 型の Synchronization 制御則 [1] を再度あげ, SICE DD アームによる実験結果をまとめる.

2.1 Slotine-Li 型の Synchronization 制御

制御対象は (1) 式のように表される n (n Degree of Freedom, n-DOF) 自由度をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) を p 台考え, ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) はすべて同一のものとする. i 番目のロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) のダイナミクス (Dynamics) は次式で与えられる.

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (1)$$

ここで, $q_i \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate), $\tau_i \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques), $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix), $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces), $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である.

すべてのロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) (1) に対し共通の目標軌道 (Common Desired Trajectory) として, 共通の目標関節角度, 角速度を q_d, \dot{q}_d とおく.

ここで, 各ロボットマニピュレータはすべてのロボットマニピュレータと通信することで, すべてのロボットマニピュレータの関節角度, 角速度, 角加速度 $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ ($i = 1, \dots, p$) を得ることができると仮定する.

偏差 (Error) e を次式のように定義する.

$$e \triangleq q - q_d \quad (2)$$

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} を次式のように定義する.

$$q_{ri} \triangleq q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j) \quad (3)$$

ここで, ゲイン $K_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は半正定対角行列 (Positive Semi-definite Diagonal Matrix) である.

また, 目標値信号 (Reference Signal) の定義には各ロボットマニピュレータの結合のされ方が現れている.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する Synchronization Error e_{si} を次式のように定義する.

$$e_{si} \triangleq q_i - q_{ri} \quad (4)$$

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する補助変数 v_i, a_i を次式のように定義する.

$$\begin{aligned} v_i &\triangleq \dot{q}_{ri} - \Lambda_i e_{si} \\ a_i &\triangleq \ddot{q}_{ri} - \Lambda_i \dot{e}_{si} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, ゲイン Λ_i は正定対角行列である.

補助変数 r_i を次式のように定義する.

$$\begin{aligned} r_i &\triangleq \dot{q}_i - v_i \\ &= \dot{e}_{si} + \Lambda_i e_{si} \end{aligned} \quad (6)$$

i 番目のロボットマニピュレータに対して, コントローラ (Controller) τ_i を次式のように与える.

$$\tau_i = M_i(r_i)a_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)v_i + g_i(q_i) - K_i r_i \quad (7)$$

よって, i 番目のロボットマニピュレータ (1) とそれに対するコントローラ τ_i (7) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式ようになる.

$$M_i(q_i)\dot{r}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)r_i - K_i r_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (8)$$

ここでは, 文献 [1] で提案した定理やその証明は省略し, 付録 A.1 に載せておく.

次節では, 本節であげた制御則を用いた SICE DD アームの実験結果をまとめる.

2.2 実験結果

本節では, 前節であげた制御則 (7) を用いた SICE DD アームの実験結果をまとめる.

2.2.1 目標軌道を余弦波とした場合

まずはじめに, 目標軌道 $q_d(t)$ を次式のように与えた場合の実験結果を示す.

$$\begin{aligned} q_{d,1} &= \frac{\pi}{6} \cos t \\ q_{d,2} &= \frac{\pi}{3} \cos t \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $q_{d,i}$ ($i = 1, 2$) は i 軸の目標軌道とする.

SICE DD アーム 1, 2 それぞれに (7) 式で表されるコントローラを適用した実験結果を次に示す.

SICE DD アーム 1, 2 それぞれに対してコントローラゲインを

- $K_i = \text{diag}\{15, 10\}$, $\Lambda_i = \text{diag}\{1.2, 0.3\}$

とし, 初期状態を $q(0) = [0, 0]^T$, $\dot{q}(0) = [0, 0]^T$ とする. ここで, コントローラゲインは入力トルクのサチュレーションが 9.8371 [N·m](2 [V]) の時に SICE DD アーム 1, 2 それぞれに対してゲインチューニングを行った結果のコントローラゲインである. この時, SICE DD アーム 1, 2 それぞれに (7) 式で表されコントローラを適用した実験結果を Fig. 1 ~ 6 に示す.

Fig. 1, 2 はそれぞれ SICE DD アーム 2 の 1 軸, 2 軸の制御入力を表している. Fig. 1, 2 より, それぞれサチュレーションの値を超えていないことがわかる.

Fig. 3, 4 はそれぞれ SICE DD アーム 2 の 1 軸, 2 軸の関節角度を表している. Fig. 3, 4 より, DD アームの動きは滑らかではあるが, 定常的な偏差が残っている.

Fig. 5, 6 はそれぞれ SICE DD アーム 1, 2 それぞれの 1 軸, 2 軸の関節角度の目標角度からの偏差を表している.

Fig. 5, 6 より, 定常的な振る舞いとなっても, (9) 式で与えられる目標軌道に対して偏差が残ってしまっていることがわかる.

そこで, (9) 式で与えられる目標軌道よりもさらに基本的な目標信号であるステップ信号に対する実験結果を次にまとめる.

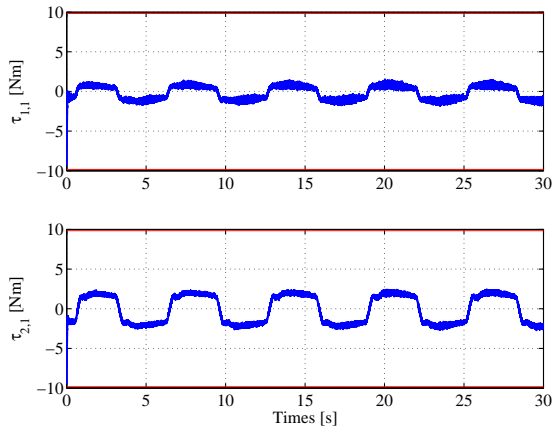


Fig.1: 1 軸の制御入力

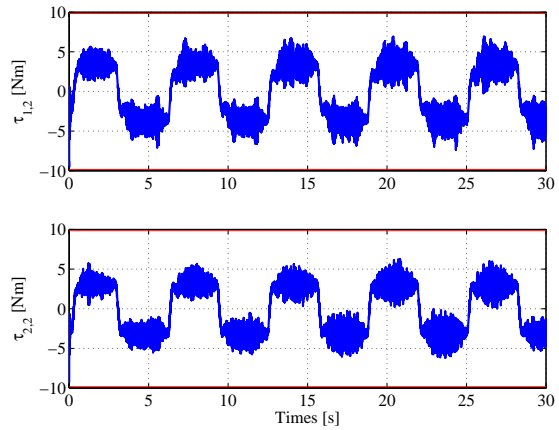


Fig.2: 2 軸の制御入力

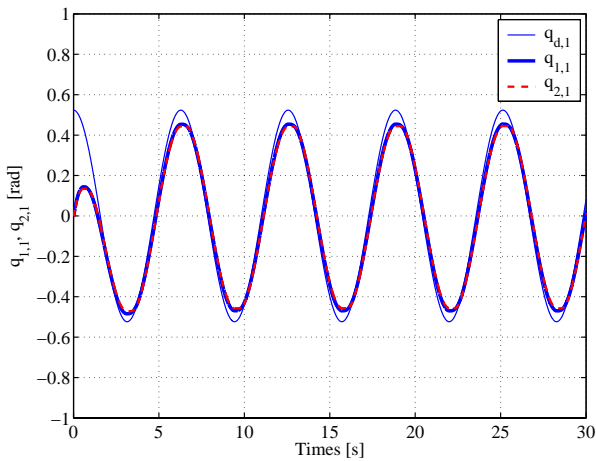


Fig.3: 1 軸の角度

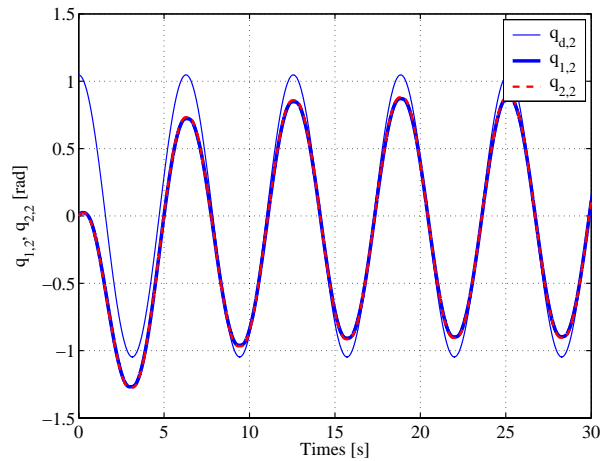


Fig.4: 2 軸の角度

2.2.2 目標軌道をステップとした場合

目標軌道 $q_d(t)$ を次式のように与えた場合の実験結果を示す.

$$\begin{aligned} q_{d,1} &= \frac{\pi}{6} \\ q_{d,2} &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $q_{d,i}$ ($i = 1, 2$) は i 軸の目標軌道とする.

SICE DD アーム 1, 2 それぞれに (7) 式で表されるコントローラを適用した実験結果を次に示す.

SICE DD アーム 1, 2 それぞれに対するコントローラゲインは 2.2.1 節と同様である. 初期状態を $q(0) = [0, 0]^T$, $\dot{q}(0) = [0, 0]^T$ とする. ここで, コントローラゲインは入力トルクのサチュレーションが 9.8371 [N·m] (2 [V]) の時に SICE DD アーム 1, 2 それぞれに対してゲインチューニングを行った結果のコントローラゲインである. この時, SICE DD アーム 1, 2 それぞれに (7) 式で表されコントローラを適用した実験結果を Fig. 7 ~ 12 に示す.

Fig. 7, 8 はそれぞれ SICE DD アーム 1, 2 それぞれの 1 軸, 2 軸の制御入力を表している. Fig. 7, 8 より, j

Fig. 9, 10 はそれぞれ SICE DD アーム 1, 2 それぞれの 1 軸, 2 軸の関節角度を表している. Fig. 9, 10 より, DD アームの動きは滑らかではあるが, 定常的な偏差が残っている.

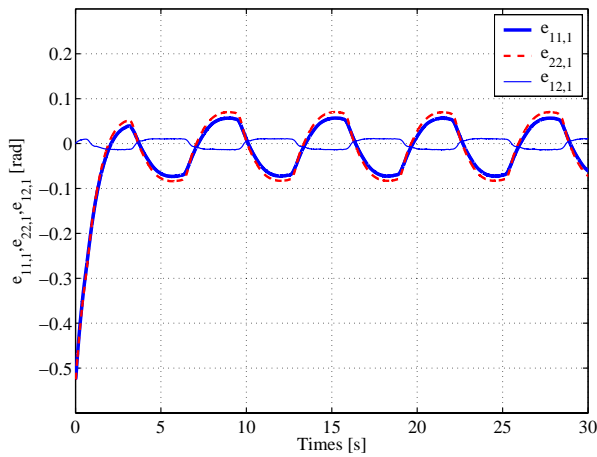


Fig.5: 1 軸の角度偏差

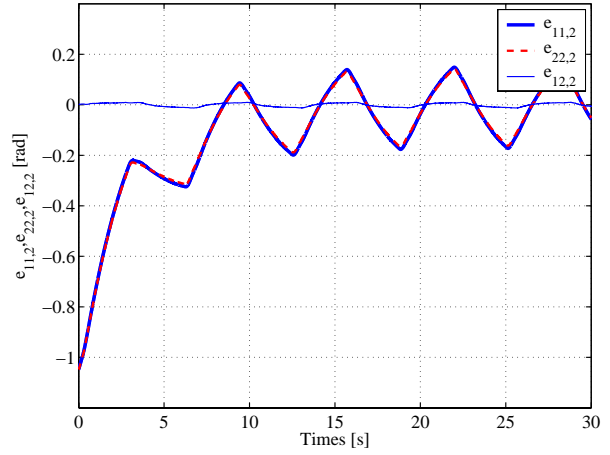


Fig.6: 2 軸の角度偏差

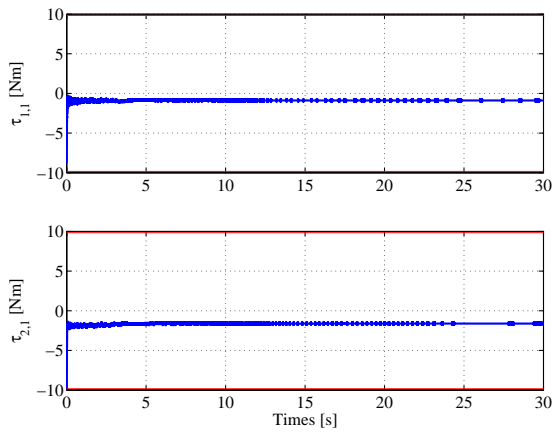


Fig.7: 1 軸の制御入力

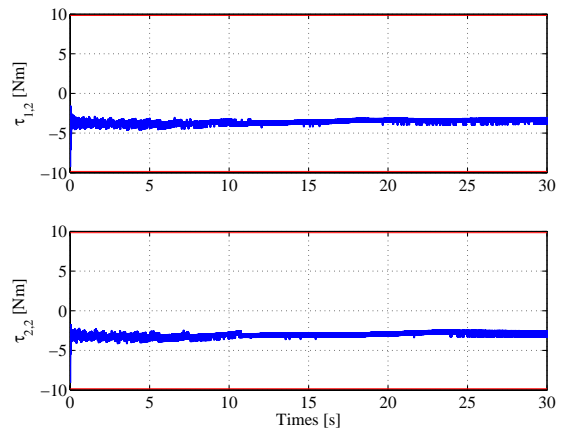


Fig.8: 2 軸の制御入力

Fig. 11 , 12 はそれぞれ SICE DD アーム 1, 2 それぞれの 1 軸, 2 軸の関節角度の目標角度からの偏差を表している。

Fig. 11 , 12 より, (10) 式で与えられる目標軌道に対して, 偏差が残っている。

この原因を突き止めるために, まずは 1 台の SICE DD アームにおいても同様に (10) 式で与えられる目標軌道に対して, 偏差が残ってしまうのかどうかを調べてみる。そこで, Slotine-Li 型の Synchronization 制御則 [1] の基にもなった追従制御における Slotine-Li の制御則 [2] を用いた実験をまとめる。

3 ロボットの追従制御における Slotine-Li 制御則 [2]

まず本節では, 前節であげた Slotine-Li 型の Synchronization 制御則 [1] の基にもなった追従制御における Slotine-Li の制御則 [2] を上げ, 1 台のロボットマニピュレータの制御において, 前節で行った実験と同様の実験を行う。

3.1 Slotine-Li の制御則 [2]

制御対象は (11) 式のように表される n (n Degree of Freedom, n -DOF) 自由度をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) である。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (11)$$

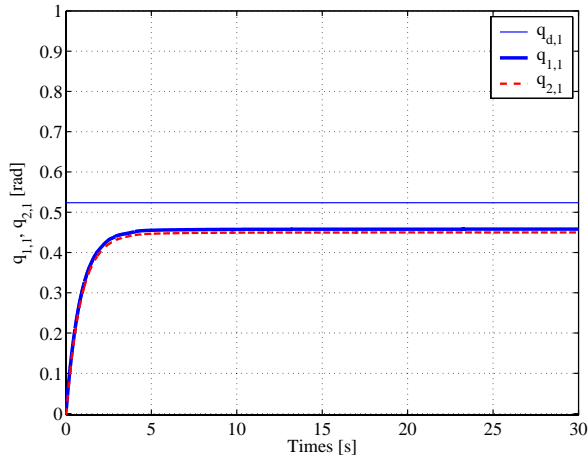


Fig.9: 1 軸の角度

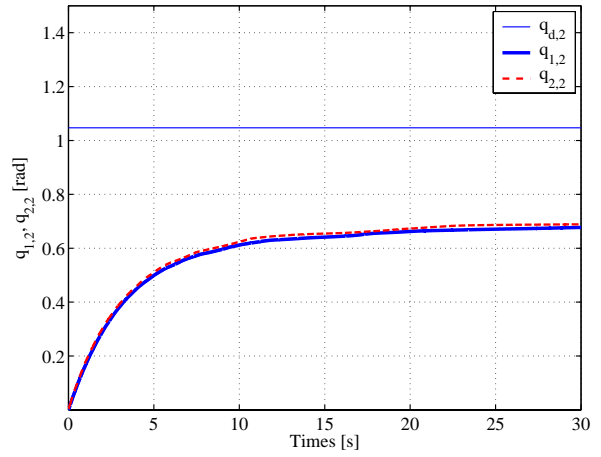


Fig.10: 2 軸の角度

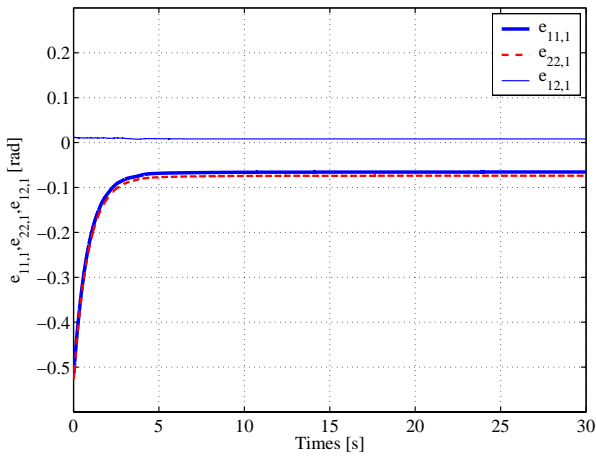


Fig.11: 1 軸の角度偏差

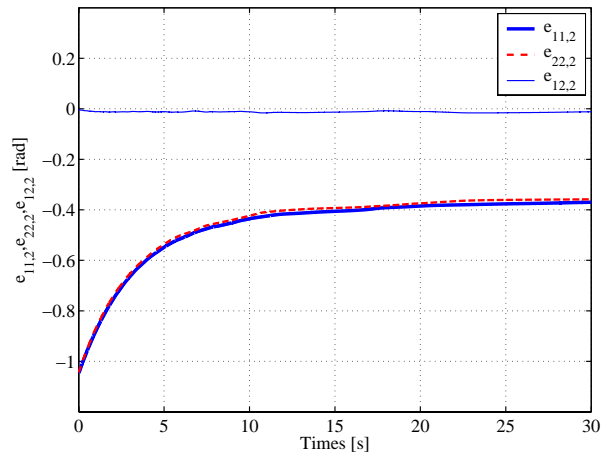


Fig.12: 2 軸の角度偏差

ここで、 $q \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate) , $\tau \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques) , $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix) , $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces) , $g(q) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である。

すべてのロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) (11) に対し目標軌道 (Common Desired Trajectory) として、目標関節角度、角速度を q_d, \dot{q}_d とおく。

ここで、各ロボットマニピュレータはすべてのロボットマニピュレータと通信することで、すべてのロボットマニピュレータの関節角度、角速度、角加速度 q, \dot{q} を得ることができると仮定する。

Error e は (2) 式のように定義する。

補助変数 v, a を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} v &\triangleq \dot{q}_d - K_P e \\ a &\triangleq \ddot{q}_d - K_P \dot{e} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、ゲイン K_P は正定対角行列である。

補助変数 r を次式のように定義する。

$$r \triangleq \dot{q} - v$$

$$= \dot{e} + K_P e \quad (13)$$

コントローラ (Controller) τ を次式のように与える.

$$\tau = M(r)a + C(q, \dot{q})v + g(q) - Kr \quad (14)$$

よって, ロボットマニピュレータ (11) とそれに対するコントローラ τ (14) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる.

$$M(q)\dot{r} = -C(q, \dot{q})r - Kr \quad (15)$$

ここでは, 文献 [2] で提案されている定理やその証明は省略し, 付録 A.2 に載せておく. 次節では, 本節であげた制御則を用いた SICE DD アームの実験結果をまとめる.

3.2 実験結果

本節では, 前節であげた制御則 (14) を用いた SICE DD アームの実験結果をまとめる.

3.2.1 目標軌道をステップとした場合

目標軌道 $q_d(t)$ を (10) 式のように与えた場合の実験結果を示す.

SICE DD アームに (14) 式で表されるコントローラを適用した実験結果を次に示す.

SICE DD アームに対してコントローラゲインを

- $K = \text{diag}\{15, 10\}$, $K_P = \text{diag}\{1.2, 0.3\}$

とし, 初期状態を $q(0) = [0, 0]^T$, $\dot{q}(0) = [0, 0]^T$ とする. ここで, コントローラゲインは入力トルクのサチュレーションが 9.8371 [N·m] (2 [V]) の時に SICE DD アームに対してゲインチューニングを行った結果のコントローラゲインである. この時, SICE DD アームに (14) 式で表されコントローラを適用した実験結果を Fig. 13 ~ 18 に示す.

Fig. 13, 14 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の制御入力を表している. Fig. 13, 14 より, それぞれサチュレーションの値を超えていないことがわかる.

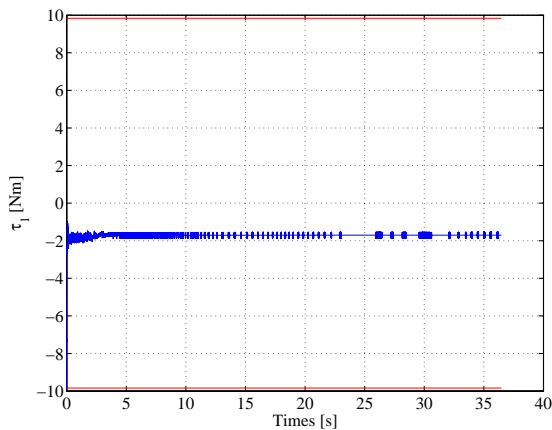


Fig.13: 1 軸の制御入力

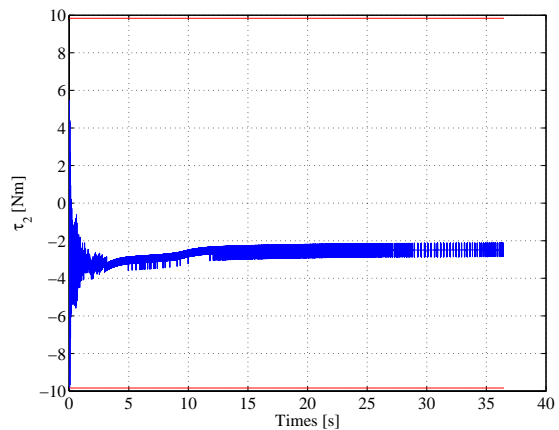


Fig.14: 2 軸の制御入力

Fig. 15, 16 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度を表している. Fig. 15, 16 より, DD アームの動きは滑らかではあるが, 定常的な偏差が残っている.

Fig. 17, 18 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度の目標角度からの偏差を表している.

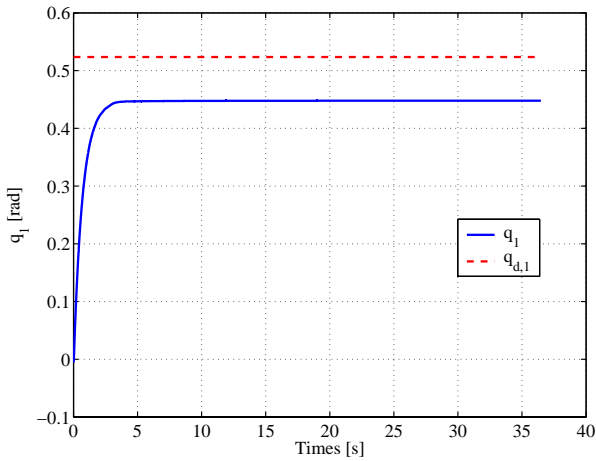


Fig.15: 1 軸の角度

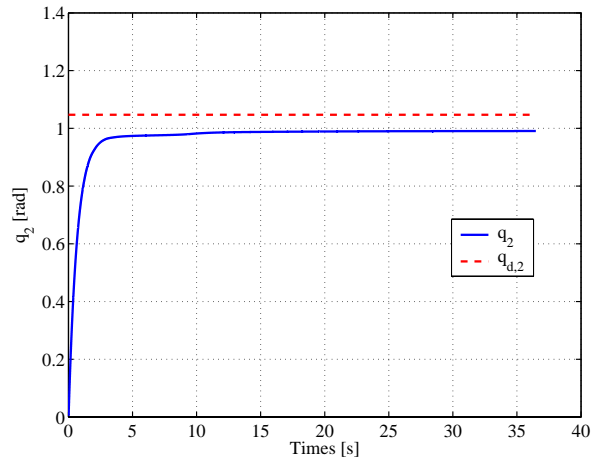


Fig.16: 2 軸の角度

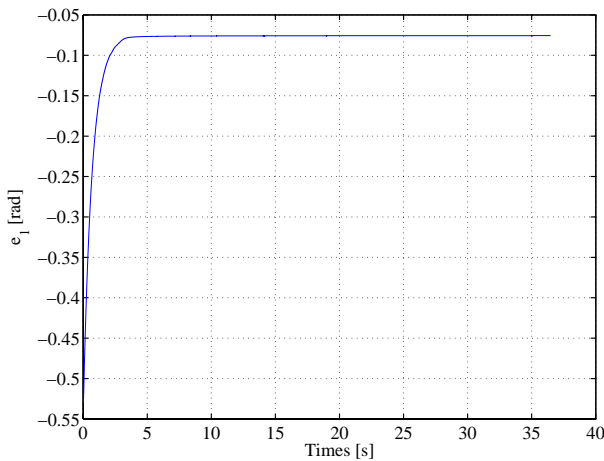


Fig.17: 1 軸の角度偏差

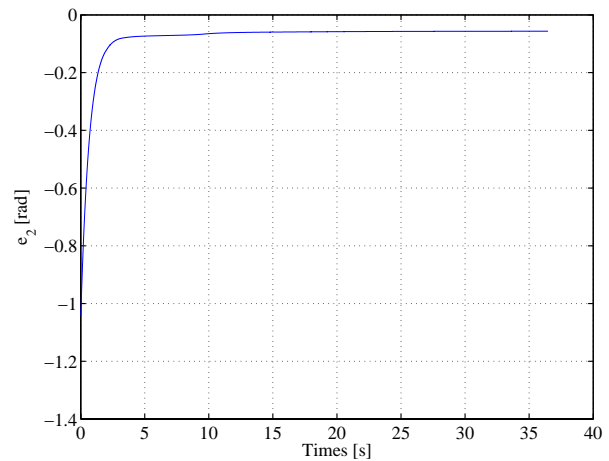


Fig.18: 2 軸の角度偏差

Fig. 17, 18 より, (10) 式で与えられる目標軌道に対して, 偏差が残っている.

つまり, 1 台のロボットに対する追従制御においても偏差が残っていたために, 2.2.2 節で行った実験結果においても Fig. 11, 12 に偏差が残っていたと考えられる.

そこで, まずは, 1 台のロボットに対する追従制御において偏差をなくす必要がある. そこで, 文献 [3] に注目し, 次節で Slotine-Li の制御則を拡張する.

4 ロボットの追従制御における PID 型制御則

まず本節では, 前節であげた Slotine-Li の制御則 [2] を PID 型へ拡張し [3], 1 台のロボットマニピュレータの制御において, 前節で行った実験と同様の実験を行う.

4.1 PID 型の制御則 [3]

制御対象は (11) 式のように表される n (n Degree of Freedom, n -DOF) 自由度をもつ

偏差 (Error) e は (2) 式と同様

$$e \triangleq q - q_d \quad (16)$$

とする.

補助変数 v, a を次式のように定義する.

$$\begin{aligned} v &\triangleq \dot{q}_d - K_P e - K_I \int_0^t e d\tau \\ a &\triangleq \ddot{q}_d - K_P \dot{e} - K_I e \end{aligned} \quad (17)$$

ここで, ゲイン K_P, K_I は正定対角行列である. (17) 式において, 右辺第 3 項に Error e の積分項が入っており, この点が Slotine-Li の制御則とは異なる.

補助変数 r を次式のように定義する.

$$\begin{aligned} r &\triangleq \dot{q} - v \\ &= \dot{e} + K_P e + K_I \int_0^t e d\tau \end{aligned} \quad (18)$$

上式において, (17) 式の右辺に新たに加わった第 3 項の Error e の積分項がそのまま (18) 式の右辺第 3 項に現れており, (18) 式の右辺の形が e の微分, ゲイン倍, 積分項によるものであることから PID 型と呼ぶ.

コントローラ (Controller) τ を次式のように与える.

$$\tau = M(r)a + C(q, \dot{q})v + g(q) - Kr \quad (19)$$

上式で与えた制御則は Slotine-Li の制御則と同じ形をしているが, 制御則に使われている補助変数 r の定義 (18) が異なることにより Slotine-Li 型の制御則とは異なる制御則となっている.

よって, ロボットマニピュレータ (11) とそれに対するコントローラ τ (19) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる.

$$M(q)\dot{r} = -C(q, \dot{q})r - Kr \quad (20)$$

ここで, 上式の閉ループ系 (Closed-loop System) に注目してみると, 上式の閉ループ系 (Closed-loop System) の形も Slotine-Li の閉ループ系 (Closed-loop System) と同じ形となっている.

定理 1 ロボットダイナミクス (11), コントローラ (19), によって形成される閉ループ系 (20) について考える. もし, ゲイン K が正定対角行列であるなら, $e \in \mathcal{L}_2^n \cap \mathcal{L}_\infty^n$, $\dot{e} \in \mathcal{L}_2^n$, e は連続であり, $t \rightarrow \infty$ において, $e \rightarrow 0$ である. さらに, $t \rightarrow \infty$ において, $r \rightarrow 0$ であるなら, $t \rightarrow \infty$ において, $\dot{e} \rightarrow 0$ となる.

証明

エネルギー関数 V を次式のように与える.

$$V(r) = \frac{1}{2} r^T M(q) r \quad (21)$$

ゲイン K が正定対角行列より, エネルギー関数 V は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V (21) の時間微分 (Time Derivative) は閉ループ系 (20), と歪み対称性 (Skew-Symmetric) を使うことにより,

$$\begin{aligned} \dot{V}(r) &= r^T M(q)\dot{r} + \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q) r \\ &= r^T (-C(q, \dot{q})r - Kr) + \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q) r \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{閉ループ系 (20) より} \\ \dot{r} = M(q)^{-1} (-C(q, \dot{q})r - Kr) \end{array} \right) \\ &= -r^T Kr + \frac{1}{2} r^T \{ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \} r \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew - Symmetric) より} \\ r^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) r = 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -r^T K r \\
&< 0 \\
&\quad \left(\because K : \text{正定対角行列} \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

となり, 負定 (Negative definite) となる. したがって, $t \rightarrow \infty$ において, $r \rightarrow 0$ である.

ここで, (18) 式の両辺をラプラス変換すると,

$$\begin{aligned}
r(s) &= se(s) + K_P e(s) + K_I \frac{1}{s} e(s) \\
&= \frac{s^2 I + K_P s + K_I}{s} e(s)
\end{aligned} \tag{23}$$

となり,

$$F^{-1}(s) = \frac{s^2 I + K_P s + K_I}{s} \tag{24}$$

とすると,

$$r(s) = F^{-1}(s)e(s) \tag{25}$$

K_P, K_I は正定対角行列であるので $F(s)$ は真にプロパーであり, 安定である. したがって, $r \in \mathcal{L}_2^n$ であるなら, 補助定理 1 (付録 B) より, $e \in \mathcal{L}_2^n \cap \mathcal{L}_\infty^n, \dot{e} \in \mathcal{L}_2^n, e$ は連続であり, $t \rightarrow \infty$ において, $e \rightarrow 0$ である. さらに, $t \rightarrow \infty$ において, $r \rightarrow 0$ であるので, $t \rightarrow \infty$ において, $\dot{e} \rightarrow 0$ となる.

4.2 実験結果

本節では, 前節であげた制御則 (19) を用いた SICE DD アームの実験結果をまとめる.

4.2.1 目標軌道をステップとした場合

目標軌道 $q_d(t)$ を (10) 式のように与えた場合の実験結果を示す.

SICE DD アームに (19) 式で表されるコントローラを適用した実験結果を次に示す.

SICE DD アームに対してコントローラゲインを

- $K = \text{diag}\{12, 2\}, K_P = \text{diag}\{1.5, 1.5\}, K_I = \text{diag}\{2, 2\}$

とし, 初期状態を $q(0) = [0, 0]^T, \dot{q}(0) = [0, 0]^T$ とする. ここで, コントローラゲインは入力トルクのサチュレーションが 9.8371 [N·m](2 [V]) の時に SICE DD アームに対してゲインチューニングを行った結果のコントローラゲインである. この時, SICE DD アームに (19) 式で表されコントローラを適用した実験結果を Fig. 19 ~ 24 に示す.

Fig. 19, 20 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の制御入力を表している. Fig. 19, 20 より, それぞれサチュレーションの値を超えていないことがわかる.

Fig. 21, 22 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度を表している. Fig. 21, 22 より,

Fig. 23, 24 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度の目標角度からの偏差を表している.

Fig. 23, 24 より, 偏差が 0 に向かっていっている様子がわかる. ただし, Fig. 21, 22 より, オーバーシュートが起きてしまっていることもわかる.

ここで, Fig. 21 ~ 24 のさらに長い時間実験を行った結果を次に示す.

Fig. 25, 26 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度を表している Fig. 21, 22 を長時間データを取った場合である. 目標の値に漸近していっていることがわかる.

Fig. 27, 28 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度の目標角度からの偏差を表している. Fig. 23, 24 を長時間データを取った場合である.

Fig. 27, 28 より, 偏差が 0 に漸近していっていることがわかる. つまり, PID 型にすることで, 定常特性を改善することができたといえる. また, 1 台での定常特性を改善することができたので, Synchronization (複数のロボット) においても, 定常特性を改善できる可能性がある.

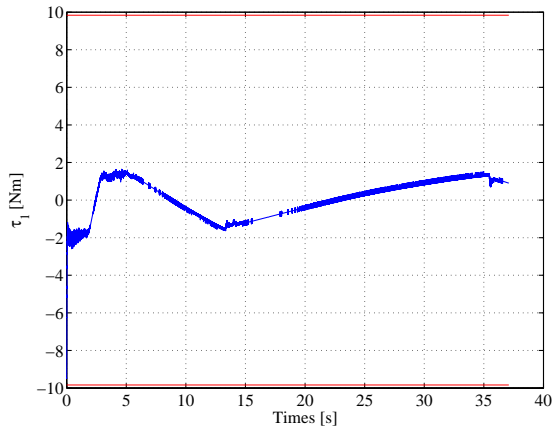


Fig.19: 1 軸の制御入力

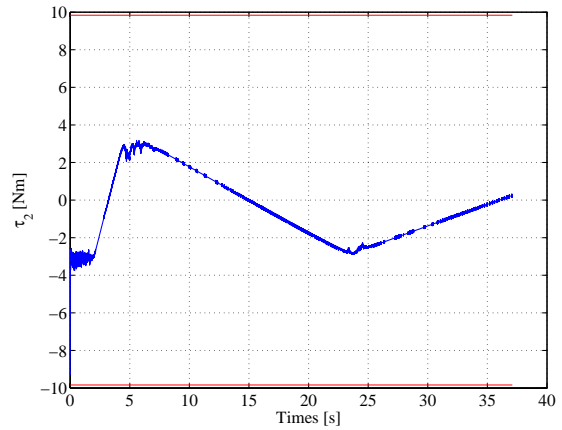


Fig.20: 2 軸の制御入力

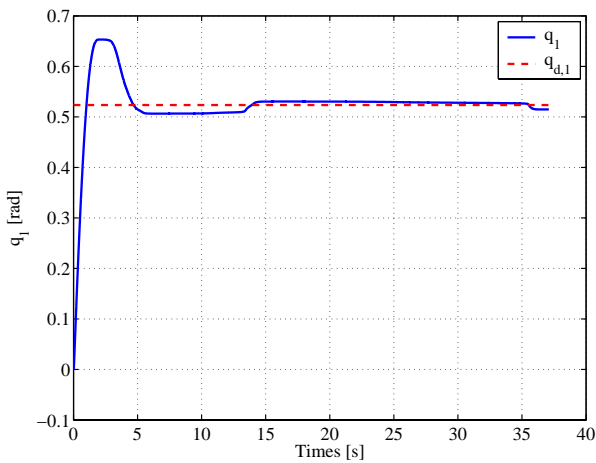


Fig.21: 1 軸の角度

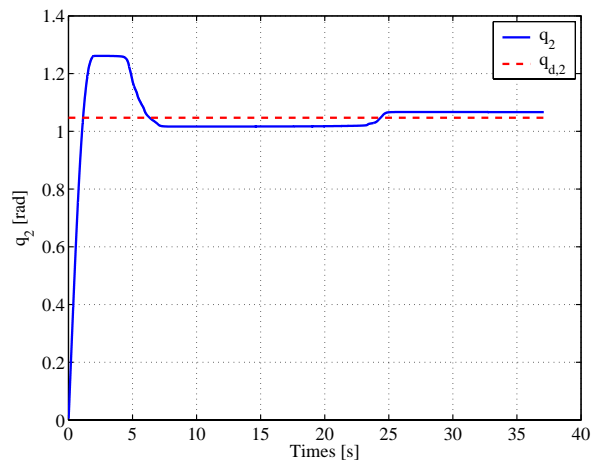


Fig.22: 2 軸の角度

4.2.2 Slotine-Li と PID 型との比較

ここで、3.2 節で行った Slotine-Li の制御則との実験結果を比較するために二つの実験結果を一つにまとめる。

Fig. 29, 30 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度を表しており, Slotine-Li の制御則を用いた場合の実験データ Fig. 15, 16 と PID 型の制御則を用いた場合の実験データ Fig. 21, 22

Fig. 31, 32 はそれぞれ SICE DD アームの 1 軸, 2 軸の関節角度の目標角度からの偏差を表しており, Slotine-Li の制御則を用いた場合の実験データ Fig. 17, 18 と PID 型の制御則を用いた場合の実験データ Fig. 23, 24

Fig. 31, 32 より, 明らかに Slotine-Li の制御則に比べて, PID 型の制御則は定常特性が改善されている。

そこで, 次節では本節で拡張した PID 型の制御則を参考にして, PID 型の Synchronization 制御則を提案する。

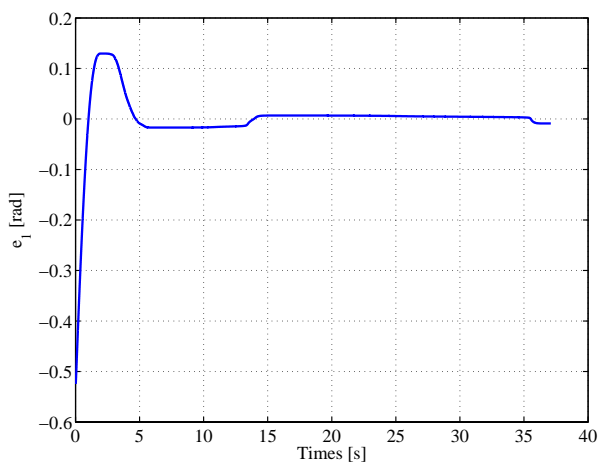


Fig.23: 1 軸の角度偏差

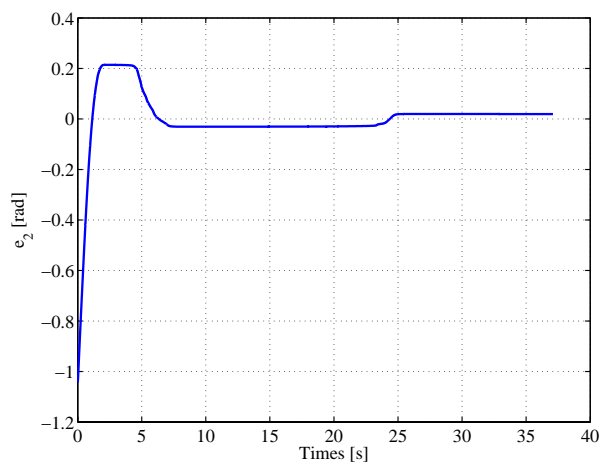


Fig.24: 2 軸の角度偏差

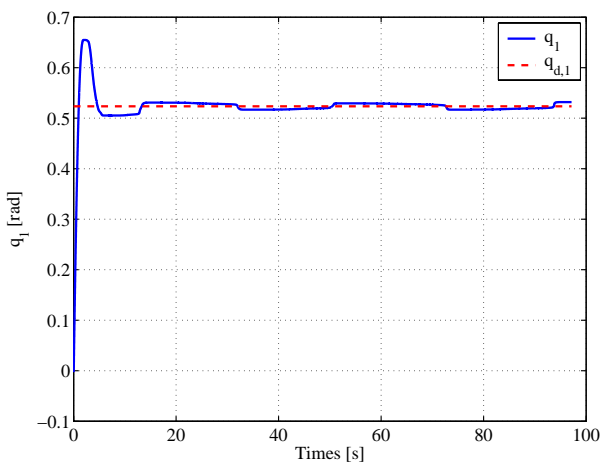


Fig.25: 1 軸の角度 (Long Time)

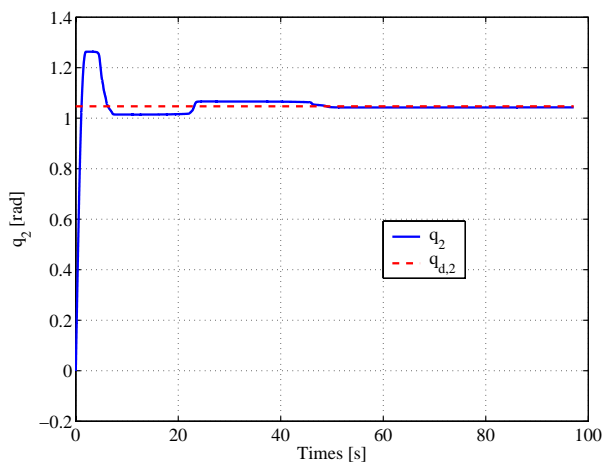


Fig.26: 2 軸の角度 (Long Time)

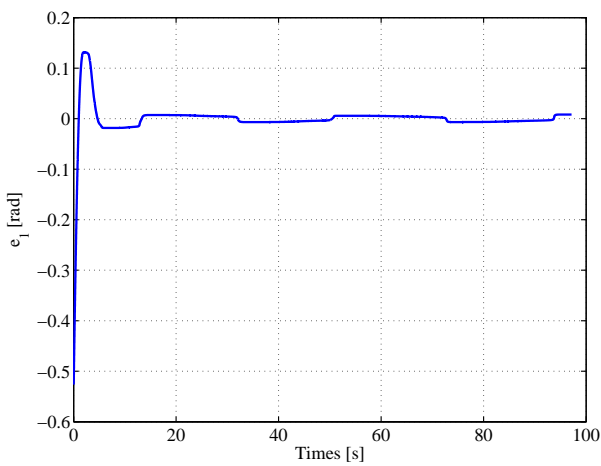


Fig.27: 1 軸の角度偏差 (Long Time)

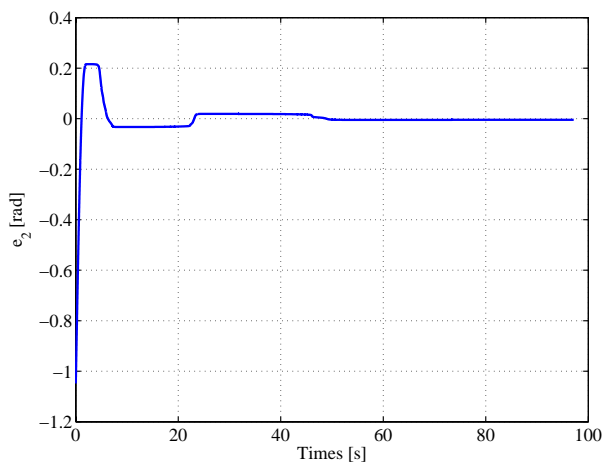


Fig.28: 2 軸の角度偏差 (Long Time)

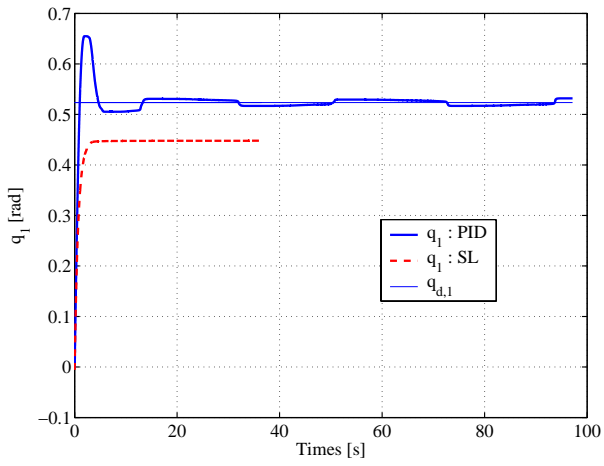


Fig.29: 1 軸の角度 (Long Time)

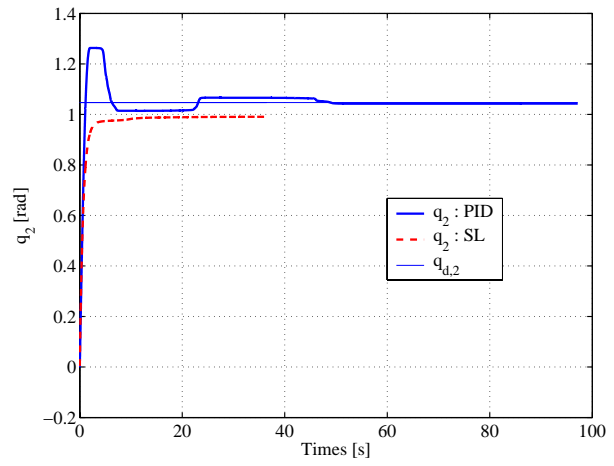


Fig.30: 2 軸の角度 (Long Time)

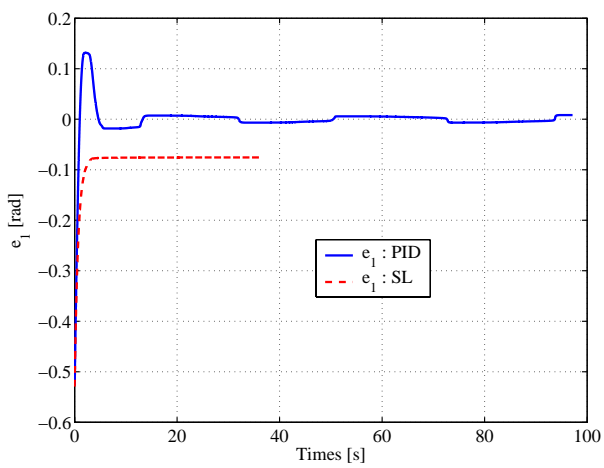


Fig.31: 1 軸の角度偏差 (Long Time)

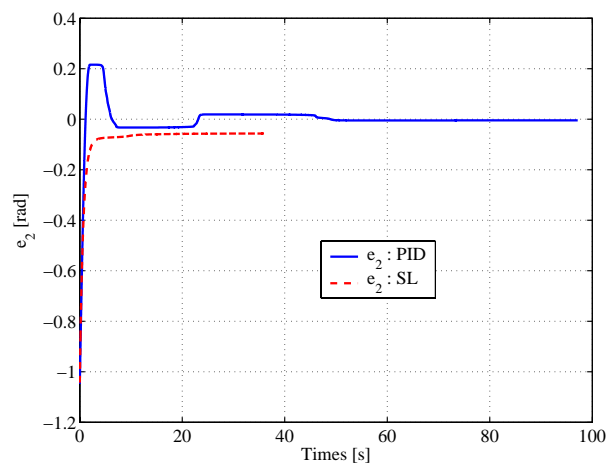


Fig.32: 2 軸の角度偏差 (Long Time)

5 PID 型の Synchronization 制御

本節では、前節であげた PID 型の制御則を基に、PID 型の Synchronization 制御則を提案する。

5.1 PID 型の Synchronization 制御則

制御対象は (1) 式のように表される n (n Degree of Freedom, n-DOF) 自由度をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) を p 台考える。その他問題設定は、2 節と同様である。

偏差 (Error) e , 目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} , Synchronization Error e_{si} は (2), (3), (4) 式と同様

$$\begin{aligned} e &\triangleq q - q_d \\ q_{ri} &\triangleq q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j) \\ e_{si} &\triangleq q_i - q_{ri} \end{aligned} \quad (26)$$

とする。

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する補助変数 v_i, a_i を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} v_i &\triangleq \dot{q}_{ri} - K_{Pi}e_{si} - K_{Ii} \int_0^t e_{si} d\tau \\ a_i &\triangleq \ddot{q}_{ri} - K_{Pi}\dot{e}_{si} - K_{Ii}e_{si} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、ゲイン K_{Pi}, K_{Ii} は正定対角行列である。(27) 式において、右辺第 3 項に Synchronization Error e_{si} の積分項が入っており、この点が Slotine-Li 型の制御則とは異なる。

補助変数 r_i を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} r_i &\triangleq \dot{q}_i - v_i \\ &= \dot{e}_{si} + K_{Pi}e_{si} + K_{Ii} \int_0^t e_{si} d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

上式において、(27) 式の右辺に新たに加わった第 3 項の Synchronization Error e_{si} の積分項がそのまま (28) 式の右辺第 3 項に現れており、(28) 式の右辺の形が e_{si} の微分、ゲイン倍、積分項によるものであることから PID 型と呼ぶ。

i 番目のロボットマニピュレータに対して、コントローラ (Controller) τ_i を次式のように与える。

$$\tau_i = M_i(q_i)a_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)v_i + g_i(q_i) - K_i r_i \quad (29)$$

上式で与えた制御則は Slotine-Li 型の制御則と同じ形をしているが、制御則に使われている補助変数 r_i の定義 (28) が異なることにより Slotine-Li 型の制御則とは異なる制御則となっている。

よって、 i 番目のロボットマニピュレータ (1) とそれに対するコントローラ τ_i (29) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式ようになる。

$$M_i(q_i)\dot{r}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)r_i - K_i r_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (30)$$

ここで、上式の閉ループ系 (Closed-loop System) に注目してみると、上式の閉ループ系 (Closed-loop System) の形も Slotine-Li 型の閉ループ系 (Closed-loop System) と同じ形となっている。

定理 2 ロボットダイナミクス (1), コントローラ (29), 目標値信号 (3) によって形成される閉ループ系 (30) について考える。もし、ゲイン $K_i, i = 1, \dots, p$ が正定対角行列であるなら、 $e_{si} \in \mathcal{L}_2^n \cap \mathcal{L}_\infty^n, \dot{e}_{si} \in \mathcal{L}_2^n, e_{si}$ は連続であり、 $t \rightarrow \infty$ において、 $e_{si} \rightarrow 0$ である。さらに、 $t \rightarrow \infty$ において、 $r_i \rightarrow 0, i = 1, \dots, p$ であるなら、 $t \rightarrow \infty$ において、 $\dot{e}_{si} \rightarrow 0$ となる。

証明

i 番目のロボットマニピュレータに対するエネルギー関数 V_i を次式のように与える.

$$V_i(r_i) = \frac{1}{2} r_i^T M_i(q_i) r_i \quad (31)$$

ゲイン $K_i, i = 1, \dots, p$ が正定対角行列より, エネルギー関数 V_i は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V_i (31) の時間微分 (Time Derivative) は閉ループ系 (30), と歪み対称性 (Skew-Symmetric) を使うことにより,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(r_i) &= r_i^T M_i(q_i) \dot{r}_i + \frac{1}{2} r_i^T \dot{M}_i(q_i) r_i \\ &= r_i^T (-C_i(q_i, \dot{q}_i) r_i - K_i r_i) + \frac{1}{2} r_i^T \dot{M}_i(q_i) r_i \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{閉ループ系 (30) より} \\ \dot{r}_i = M_i(q_i)^{-1} (-C_i(q_i, \dot{q}_i) r_i - K_i r_i) \end{array} \right) \\ &= -r_i^T K_i r_i + \frac{1}{2} r_i^T \left\{ \dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i) \right\} r_i \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew - Symmetric) より} \\ r_i^T \left(\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i) \right) r_i = 0 \end{array} \right) \\ &= -r_i^T K_i r_i \\ &< 0 \\ &\quad \left(\because K_i : \text{正定対角行列} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで, リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, 各ロボットマニピュレータに対するエネルギー関数 (Energy Function) (31) の和を考える.

$$\begin{aligned} V(r_i) &= \sum_{i=1}^p V_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{2} r_i^T M_i(q_i) r_i \right) \end{aligned} \quad (33)$$

各ロボットマニピュレータ i に対するエネルギー関数 V_i (31) が正定関数であることから, エネルギー関数 (Energy Function) V も正定関数である. エネルギー関数 (Energy Function) V (33) の時間微分 (Time Derivative) は (32) 式より,

$$\begin{aligned} \dot{V}(r_i) &= \sum_{i=1}^p \dot{V}_i(r_i) \\ &= \sum_{i=1}^p (-r_i^T K_i r_i) \\ &= -\sum_{i=1}^p r_i^T K_i r_i \\ &< 0 \end{aligned} \quad (34)$$

となり, 負定 (Negative definite) となる. したがって, $t \rightarrow \infty$ において, $r_i \rightarrow 0, i = 1, \dots, p$ である.

ここで, (28) 式の両辺をラプラス変換すると,

$$\begin{aligned} r_i(s) &= s e_{si}(s) + K_{Pi} e_{si}(s) + K_{Ii} \frac{1}{s} e_{si}(s) \\ &= \frac{s^2 I + K_{Pi} s + K_{Ii}}{s} e_{si}(s) \end{aligned} \quad (35)$$

となり,

$$F_i^{-1}(s) = \frac{s^2 I + K_{Pi} s + K_{Ii}}{s} \quad (36)$$

とすると,

$$r_i(s) = F_i^{-1}(s)e_{si}(s) \quad (37)$$

K_{Pi}, K_{Ii} は正定対角行列であるので $F_i(s)$ は真にプロパーであり, 安定である. したがって, $r_i \in \mathcal{L}_2^n$ であるなら, 補助定理 1 (付録 B) より, $e_{si} \in \mathcal{L}_2^n \cap \mathcal{L}_\infty^n$, $\dot{e}_{si} \in \mathcal{L}_2^n$, e_{si} は連続であり, $t \rightarrow \infty$ において, $e_{si} \rightarrow 0$ である. さらに, $t \rightarrow \infty$ において, $r_i \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, p$ であるので, $t \rightarrow \infty$ において, $\dot{e}_{si} \rightarrow 0$ となる.

今, 定理 2 より, $t \rightarrow \infty$ において, $e_{si} \rightarrow 0$ である. $t \rightarrow \infty$ において, $\dot{e}_{si} \rightarrow 0$ となることが言えた. そこで, Synchronization Error e_{si}, \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言えれば, 補助定理 2 (付録 B) を用いることにより, Synchronization Error e_{si}, \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) と Synchronization $q_i \rightarrow q_j, \dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_j$ ($j = 1, \dots, p, j \neq i$) が等価となることが言える. したがって, コントローラ (29) を用いることで Synchronization が達成できる.

6 おわりに

本レポートでは, Slotine-Li 型の Synchronization 制御則を用いた実験を通して Slotine-Li 型の Synchronization 制御則 [1] の問題点を挙げ, 新たに PID 型の Synchronization 制御則を提案した.

しかし, まだ PID 型の Synchronizaion 制御則を用いた実験において検証は行っていない. また, PID 型の Synchronizaion 制御則は局所的に Synchronization が達成できることしか補償されていない. そこで, 今後は PID 型の Synchronizaion 制御則の実験による検証や, 大域的に Synchronization が達成される新たな制御則の提案が課題となっている.

A 証明

A.1 Slotine-Li 型の Synchronization 制御の定理と証明

定理 3 ロボットダイナミクス (1), コントローラ (7), 目標値信号 (3) によって形成される閉ループ系 (8) について考える. もし, ゲイン K_i , $i = 1, \dots, p$ が正定対角行列であるなら, Synchronization Error e_{si}, \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ は大域的に漸近安定である.

証明

i 番目のロボットマニピュレータに対するエネルギー関数 V_i を次式のように与える.

$$V_i(e_{si}, \dot{e}_{si}) = \frac{1}{2} r_i^T M_i(q_i) r_i + e_{si}^T \Lambda_i^T K_i e_{si} \quad (38)$$

ゲイン K_i , $i = 1, \dots, p$ が正定対角行列より, エネルギー関数 V_i は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V_i (38) の時間微分 (Time Derivative) は閉ループ系 (8), と歪み対称性 (Skew-Symmetric) を使うことにより,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(e_{si}, \dot{e}_{si}) &= r_i^T M_i(q_i) \dot{r}_i + \frac{1}{2} r_i^T \dot{M}_i(q_i) r_i + 2e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \dot{e}_{si} \\ &= r_i^T (-C_i(q_i, \dot{q}_i) r_i - K_i r_i) + \frac{1}{2} r_i^T \dot{M}_i(q_i) r_i + 2e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \dot{e}_{si} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{閉ループ系 (8) より} \\ \dot{r}_i = M_i(q_i)^{-1} (-C_i(q_i, \dot{q}_i) r_i - K_i r_i) \end{array} \right) \\ &= -r_i^T K_i r_i + \frac{1}{2} r_i^T \left\{ \dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i) \right\} r_i + 2e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \dot{e}_{si} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew - Symmetric) より} \\ r_i^T \left(\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i) \right) r_i = 0 \end{array} \right) \\ &= -(\dot{e}_{si} + \Lambda_i e_{si})^T K_i (\dot{e}_{si} + \Lambda_i e_{si}) + 2e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \dot{e}_{si} \\ &= -\dot{e}_{si}^T K_i \dot{e}_{si} - e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \Lambda_i e_{si} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \Lambda_i^T K_i = K_i^T \Lambda_i = K_i \Lambda_i \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$< 0 \quad \left(\because \Lambda_i : \text{正定対角行列}, K_i : \text{正定対角行列} \right) \quad (39)$$

ここで、リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として、各ロボットマニピュレータに対するエネルギー関数 (Energy Function) (38) の和を考える。

$$\begin{aligned} V(e_s, \dot{e}_s) &= \sum_{i=1}^p V_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{2} r_i^T M_i(q_i) r_i + e_{si}^T \Lambda_i^T K_i e_{si} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

ここで、 $e_s = [e_{s1}, \dots, e_{sp}]^T$, $\dot{e}_s = [\dot{e}_{s1}, \dots, \dot{e}_{sp}]^T$ とする。各ロボットマニピュレータ i に対するエネルギー関数 V_i (38) が正定関数であることから、エネルギー関数 (Energy Function) V も正定関数である。エネルギー関数 (Energy Function) V (40) の時間微分 (Time Derivative) は (39) 式より、

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_s, \dot{e}_s) &= \sum_{i=1}^p \dot{V}_i(e_{si}, \dot{e}_{si}) \\ &= \sum_{i=1}^p \left(-\dot{e}_{si}^T K_i \dot{e}_{si} - e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \Lambda_i e_{si} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^p \dot{e}_{si}^T K_i \dot{e}_{si} - \sum_{i=1}^p e_{si}^T \Lambda_i^T K_i \Lambda_i e_{si} \\ &< 0 \end{aligned} \quad (41)$$

となり、負定 (Negative definite) となる。したがって、Synchronization Error e_{si} , \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える。

今、定理 3 より、Synchronization Error e_{si} , \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言えたが、まだ、Synchronization は言えていない。そこで、次の補助定理 2 (付録 B) を用いることにより、Synchronization Error e_{si} , \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) と Synchronization $q_i \rightarrow q_j$, $\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_j$ ($j = 1, \dots, p$, $j \neq i$) が等価となることを言う。

補助定理 2 において、(46) 式の右側は Synchronization Error の漸近安定 $e_{si} \rightarrow 0$, $\dot{e}_{si} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ ($i = 1, \dots, p$) を表しており、左側が Synchronization $q_i \rightarrow q_d$, $\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_d$ ($i = 1, \dots, p$) を意味している。つまり、補助定理より、Synchronization Error e_{si} , \dot{e}_{si} , $i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が Synchronization $q_i \rightarrow q_j$, $\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_j$ ($j = 1, \dots, p$, $j \neq i$) と等価となることが言える。したがって、Synchronization $q_i \rightarrow q_j$, $\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_j$ ($j = 1, \dots, p$, $j \neq i$) すると言える。

A.2 Slotine-Li 型の制御の定理と証明

定理 4 ロボットダイナミクス (11), コントローラ (14), によって形成される閉ループ系 (15) について考える。もし、ゲイン K が正定対角行列であるなら、Error e , \dot{e} は大域的に漸近安定である。

証明

エネルギー関数 V を次式のように与える。

$$V(r) = \frac{1}{2} r^T M(q) r + e^T K_P K e \quad (42)$$

ゲイン K が正定対角行列より、エネルギー関数 V は正定関数 (Positive Function) であることがわかる。エネルギー関数 V (42) の時間微分 (Time Derivative) は閉ループ系 (15), と歪み対称性 (Skew-Symmetric) を使うことにより、

$$\dot{V}(r) = r^T M(q) \dot{r} + \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q) r + 2e^T K_P K \dot{e}$$

$$\begin{aligned}
&= r^T (-C(q, \dot{q})r - Kr) + \frac{1}{2}r^T \dot{M}(q)r + 2e^T K_P K \dot{e} \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{閉ループ系 (15) より} \\ \dot{r} = M(q)^{-1} (-C(q, \dot{q})r - Kr) \end{array} \right) \\
&= -r^T Kr + \frac{1}{2}r^T \{ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \} r + 2e^T K_P K \dot{e} \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew - Symmetric) より} \\ r^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) r = 0 \end{array} \right) \\
&= -r^T Kr + 2e^T K_P K \dot{e} \\
&= -(\dot{e} + K_P e)^T K (\dot{e} + K_P e) + 2e^T K_P K \dot{e} \\
&= -\dot{e}^T K \dot{e} - e^T K_P^T K K_P e - 2e^T K_P K \dot{e} + 2e^T K_P K \dot{e} \\
&\quad \left(\because K : \text{正定対角行列} \right) \\
&= -\dot{e}^T K \dot{e} - e^T K_P^T K K_P e \\
&< 0
\end{aligned} \tag{43}$$

となり, 負定 (Negative definite) となる. したがって, Error e , \dot{e} は漸近安定 (Asymptotically Stable) と言える.

B 補助定理

補助定理 1

$$e = H(s)r \tag{44}$$

ここで, $H(s)$ は $n \times m$ で真にプロパーであり, 指数安定な伝達関数であるとする. もし, $r \in \mathcal{L}_2^m$ であるなら, $e \in \mathcal{L}_2^n \cap \mathcal{L}_\infty^n$, $\dot{e} \in \mathcal{L}_2^n$, e は連続であり, $t \rightarrow \infty$ において, $e \rightarrow 0$ である. さらに, $t \rightarrow \infty$ において, $r \rightarrow 0$ であるなら, $t \rightarrow \infty$ において, $\dot{e} \rightarrow 0$ となる.

補助定理 2 (46) 式で目標値信号 (3) の Coupling Matrix $K_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, p$ を使って表される対角優勢行列 (Diagonally Dominant Matrix) $M_c(K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times (n \cdot p)}$ について考える. このとき, $M_c(K_{i,j})$ は多構造のシステムにおいてロボット間の Coupling Matrix として考えられる.

行列 $M_c(K_{i,j})$ はすべての半正定対角行列 $K_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, p$ に対して正則である. さらに, すべての半正定対角行列 $K_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, p$ に対して

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \tag{45}$$

の関係を保つ.

$$M_c(K_{i,j}) = \begin{bmatrix} \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq 1}^p K_{1,j} \right) & -K_{1,2} & \cdots & -K_{1,p} \\ -K_{2,1} & \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq 2}^p K_{2,j} \right) & \cdots & -K_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_{p,1} & -K_{p,2} & \cdots & \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq p}^p K_{p,j} \right) \end{bmatrix} \tag{46}$$

参考文献

- [1] 米村, “Synchronization 制御則の Slotine-Li 型への展開,” FL セミナー資料, No. FL06-12-1, 2006.
- [2] J. J.-E. Slotine, W. Li, “On the Adaptive Control of Robot Manipulators,” *Int. J. of Robotics Res.*, Vol. 6, pp49–59, 1987.
- [3] R. Ortega, M. W. Spong, “Adaptive Motion Control of Rigid Robots : a Tutorial,” *Automatica*, Vol. 25, No. 6, pp. 877–888, 1989.