Flocking in Fixed Networks 補足資料

藤田研究室 小林尚斗

平成 18 年 7 月 24 日

この補足資料ではまず今回紹介しているシステムと式 (15) のポテンシャル関数の特性について述べ, それからこの特性を用いて式 (19), (20) を詳細に計算する.

1 システムとポテンシャル関数の特性

この節では 3 つの特性について述べる. 今は式 (11), (12) のダイナミクスを持ち, 式 (14) の入力を加えた無向, 連結, 時不変のグラフ G で表されるシステムを考えている.

特性１ 式 (15) のポテンシャル関数 V_{ij} は agent i, j 間の距離の関数なので $V_{ij} = V_{ji}$ が成り立つ. また無向グラフを考えているので, agent i, j が近傍関係にあるとき式 (16) の agent i のポテンシャル V_i には V_{ij} が含まれ, また agent j のポテンシャル V_j には $V_{ji}(= V_{ij})$ が含まれる.

特性 2 $\nabla_{r_i} V_{ij} = \nabla_{r_{ij}} V_{ij} = -\nabla_{r_{ji}} V_{ij} = -\nabla_{r_j} V_{ij}$ が成り立つ.

証明: 実際に計算を行うことで証明できる.

$$\nabla_{r_i} V_{ij} = \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial r_i}\right]^T \tag{1.1}$$

$$= \left[\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_i}\right]^T \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}}\right]^T \tag{1.2}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(r_{ix} - r_{jx})}{\partial r_{ix}} & \dfrac{\partial(r_{ix} - r_{jx})}{\partial r_{iy}} \\ \dfrac{\partial(r_{iy} - r_{jy})}{\partial r_{ix}} & \dfrac{\partial(r_{iy} - r_{jy})}{\partial r_{iy}} \end{bmatrix}^T \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}}\right]^T \tag{1.3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}}\right]^T \tag{1.4}$$

$$= \nabla_{r_{ij}} V_{ij} \tag{1.5}$$

また,

$$\nabla_{r_i} V_{ij} = \nabla_{r_{ij}} V_{ij} \tag{1.6}$$

$$= \nabla_{(-r_{ji})} V_{ij} \qquad r_{ij} = r_i - r_j \text{ なので } r_{ij} = -r_{ji} \text{ であるので} \tag{1.7}$$

$$= -\nabla_{r_{ji}} V_{ij} \tag{1.8}$$

$$= -\nabla_{r_j} V_{ij} \tag{1.9}$$

特性 3 $\sum_{j\sim i} V_{ij}$ は, 近傍関係にある agent i, j について V_{ij} を重複なく足したものであると定義する. ここで重複なくというのはすでに V_{ij} が足されている場合 V_{ji} $(= V_{ij})$ は足さないということである. この $\sum_{j\sim i} V_{ij}$ と $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} V_{ij}$ は次の関係にある.

$$\sum_{j\sim i} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} V_{ij} \tag{1.10}$$

ここで右辺の $\sum_{j\in\mathcal{N}_i} V_{ij}$ は式 (15) より V_i と置き換えられ, また先に述べた特性 1 から $\sum_{i=1}^{N} V_i$ においては近傍関係にある agent i, j について V_{ij} が 2 回ずつ足されることになるので, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} V_{ij}$ は V_{ij} を重複なく足している $\sum_{j\sim i} V_{ij}$ の 2 倍に等しいことが分かる. これよりこの式が成り立つことが分かる.

2　式 (19), (20) の計算

まずはじめに 4.2 節における式 (16) から式 (22) までが意味することについて述べておく.

ここでは LaSalle の不変原理を用いてすべての agent の速度が同じ値に収束するという証明をしている. その証明を行う上で必要となってくる式が (16) から式 (21) である. すなわち, まず最初に必要となるコンパクトで正不変の集合が式 (17) の Ω であり, Ω 内において非負である関数が式 (16) の $W(r,v)$ である. そして次に必要となってくる $\dot{W} \leq 0$ という性質を導き出すために式 (18)〜(22) を計算している. また式 (21) からすべての agent の速度が同じ値になっているとき $\dot{W}=0$ となることが分かる. これより初期状態が Ω に含まれているシステムはすべての agent の速度がすべて同じ, すなわち $v \in span\{1\}$ に収束することが証明されるという流れである.

本節ではこの式 (16)〜(22) の中で, 特に前節で述べた特性を用いて計算されている式 (19), (20) について, 補足説明の意味で詳細に計算する.

式 (19)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{V}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\dot{V}_{ij} \qquad \text{式 (15) より} \tag{2.1}$$

$$= \sum_{j\sim i}\dot{V}_{ij} \qquad \text{特性 3 より} \tag{2.2}$$

$$= \sum_{j\sim i}\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$= \sum_{j\sim i}\left[\nabla_{r_{ij}}V_{ij}\right]^T \dot{r}_{ij} \tag{2.4}$$

$$= \sum_{j\sim i}\dot{r}_{ij}^T\nabla_{r_{ij}}V_{ij} \qquad \left[\nabla_{r_{ij}}V_{ij}\right]^T \dot{r}_{ij}\ \text{はスカラーだから転置をとっても等しいので} \tag{2.5}$$

$$= \sum_{j\sim i}(\dot{r}_i^T\nabla_{r_{ij}}V_{ij} - \dot{r}_j^T\nabla_{r_{ij}}V_{ij}) \qquad r_{ij} = r_i - r_j\ \text{より} \tag{2.6}$$

$$= \sum_{j\sim i}(\dot{r}_i^T\nabla_{r_i}V_{ij} - \dot{r}_j^T\nabla_{(-r_j)}V_{ij}) \qquad \text{特性 2 より} \tag{2.7}$$

$$= \sum_{j\sim i}(\dot{r}_i^T\nabla_{r_i}V_{ij} + \dot{r}_j^T\nabla_{r_j}V_{ij}) \tag{2.8}$$

$$= 2\sum_{j\sim i}\dot{r}_i^T\nabla_{r_i}V_{ij} \qquad \text{特性 3 より} \tag{2.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\dot{r}_i^T\nabla_{r_i}V_{ij} \qquad \text{特性 3 より} \tag{2.10}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\dot{r}_i^T\nabla_{r_i}V_i \qquad \text{式 (15) より} \tag{2.11}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}v_i^T\nabla_{r_i}V_i \tag{2.12}$$

式 (20)

$$
\begin{aligned}
\dot{W} &= \sum_{i=1}^{N} {v_i}^T \nabla_{r_i} V_i - \sum_{i=1}^{N} v_i^T \Big(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (v_i - v_j) + \nabla_{r_i} V_i\Big) && (2.13)\\
&= -\sum_{i=1}^{N} {v_i}^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (v_i - v_j) && (2.14)\\
&= -v^T \begin{bmatrix} \sum_{j \in \mathcal{N}_1} (v_1 - v_j) \\ \vdots \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_N} (v_N - v_j) \end{bmatrix} && (2.15)\\
&= -v^T (L \otimes I_2) v \qquad \text{式 (2), (4) より} && (2.16)
\end{aligned}
$$

ここで L はグラフ G のグラフラプラシアンである. また $v_i = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}$ というように各 agent の速度を二次元で考えているので, L と二次元の単位行列を Kronecker matrix product で結んでいる.