

確率システムの状態推定と最適制御

藤田研究室 西崎潤平

平成 18 年 7 月 10 日

1 Introduction

本レポートでは stochastic system において重要な Kalman filter と LQG(Linear Quadratic Gaussian) の説明をした後, packet-loss を考慮した system での estimation と optimal controller を 2 種類の channel(TCP-like protocol/UDP-like protocol) に適用させた場合について説明する.

2 Kalman Filter

Controller で system を control するために, sensor から得られた output から system の state variable を observer で estimate する必要がある. しかし, 現代制御論で紹介される Luengerger 型 observer では system に noise のような stochastic variable を無視した deterministic observer である. そこで, ここでは optimal estimator である Kalman filter によって noise を考慮した stochastic system の optimal state estimation を説明する.

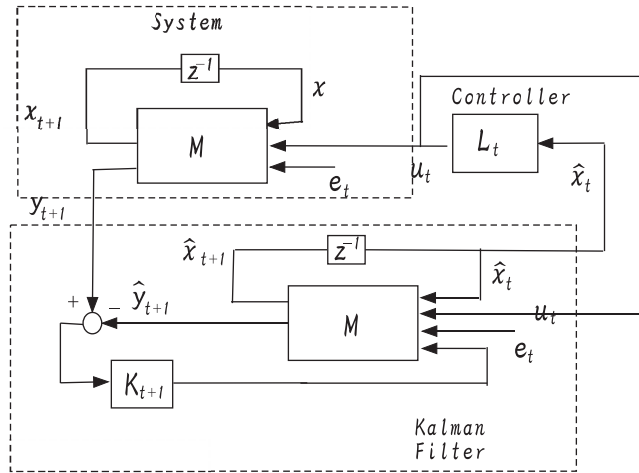


Fig. 1: stochastic system without packet-loss

Noise を考慮した stochastic system として次のような model を考える. ブロック線図は Fig. 1 のようになる.

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{1}$$

ここで, $x_k \in R^n$ は state vector, $y_k \in R^m$ は output vector, $u_k \in R^q$ は input vector, $w_k \in R^n, v_k \in R^m$ はそれぞれ Gaussian, uncorrelated, white, zero mean で, covariance はそれぞれ (Q, R) となり, 次の性質を持つ.

$$\begin{aligned}
E[w_k] &= E[v_k] = 0 \\
E[w_k w_t'] &= \begin{cases} Q & k = t \\ 0 & k \neq t \end{cases} \\
E[v_k v_t'] &= \begin{cases} R & k = t \\ 0 & k \neq t \end{cases} \\
E[w_k v_k'] &= E[v_k w_k'] = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

また, information set を次のように define する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k &= \{y^k\} \\
y^k &= (y_k, y_{k-1}, \dots, y_1)
\end{aligned}$$

Mathematical background として次の variable を定義する.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k} &\triangleq E[x_k | \mathcal{I}_k] \\
e_{k|k} &\triangleq x_k - \hat{x}_{k|k} \\
P_{k|k} &\triangleq E[e_{k|k} e_{k|k}']
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで, $\hat{x}_{k|k}$ は estimation で, 実際に controller に input する variable である. $e_{k|k}$ は estimation error, そして $P_{k|k}$ は estimation error covariance である.

次に prediction について説明する. prediction とは以下のような algorithm のことである. $\hat{x}_{k+1|k} \in R^n$ は priori state estimate.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1|k} &\triangleq E[x_{k+1} | \mathcal{I}_k] = E[Ax_k + Bu_k + w_k | \mathcal{I}_k] \\
&= AE[x_k | \mathcal{I}_k] + Bu_k \\
&= A\hat{x}_{k|k} + Bu_k
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
e_{k+1|k} &\triangleq x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \\
&= Ax_k + Bu_k + w_k - (A\hat{x}_{k|k} + Bu_k) \\
&= Ae_{k|k} + w_k
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
P_{k+1|k} &\triangleq E[e_{k+1|k} e_{k+1|k}'] \\
&= AE[e_{k|k} e_{k|k}']A' + E[w_k w_k'] \\
&= AP_{k|k}A' + Q
\end{aligned} \tag{6}$$

$\hat{x}_{k+1|k}$ は step k での priori state estimate で, step k での estimate $\hat{x}_{k|k}$ の情報を持っている. 続いて, $e_{k+1|k}$ は priori estimate error, そして, $P_{k+1|k}$ は priori estimate error covariance という.

続いて, measurement update について説明する. measurement update とは以下のような algorithm のことである.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e_{k+1|k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k+1} \\ &= x_{k+1} - (\hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k})) \\ &= e_{k+1|k} - K_{k+1}(Cx_{k+1} + v_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}) \\ &= (I - K_{k+1}C)e_{k+1|k} - K_{k+1}v_{k+1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$P_{k+1|k+1} = E[e_{k+1|k+1}e'_{k+1|k+1}] \quad (9)$$

$\hat{x}_{k+1|k+1} \in R^n$ は step k での posteriori state estimate といひ, measurement output の情報をもつ. $e_{k+1|k+1}$ は posteriori estimate error, そして $P_{k+1|k+1}$ is the posteriori estimate error covariance である. Kalman filter の optimal estimation problem はこの posteriori estimation error covariance $P_{k+1|k+1}$ を minimize させる Kalman gain K_{k+1} を求めることである. $P_{k+1|k+1}$ を minimize させる K_{k+1} は

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}C'(CP_{k+1|k}C' + R)^{-1} \quad (10)$$

のように与えられ, このとき $P_{k+1|k+1}$ は

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1}CP_{k+1|k} \quad (11)$$

である. Kalman filter は stochastic system における optimal estimator で, noise を無視した system では linear estimator が optimal estimator である.

3 Linear Quadratic Gaussian

System に input する u_k を各 step k において optimalization するため, ある value function $V(x_k)$ を define してそれを optimize させる input を求めることが optimal control problem である. 現代制御論で紹介される基本的な optimal control problem に LQR(Linear Quadratic Regulator)problem があるが, LQR も stochastic variable を無視した system には適用できるが, noise などが入った stochastic system では適さない. そこで LQG による stochastic system の optimal control problem について説明する.

まず, 次のような cost function J_N を define して, それを最小とするような各 step k での input u_k , $k = 0, \dots, N$ を求める.

$$J_N = E[x'_N W_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} x'_k W_k x_k + u'_k U_k u_k | \mathcal{I}_N] \quad k = 0, \dots, N \quad (12)$$

ここで, W_k, U_k は symmetric and positive definite or semidefinite matrix である.

次に, optimal control gain を求める. 式 (3) より, 次のことがわかっている.[1]

$$E[(x_k - \hat{x}_k)\hat{x}'_k | \mathcal{I}_k] = E[e_{k|k}\hat{x}'_k | \mathcal{I}_k] = 0 \quad (13)$$

$$E[x'_k S x_k | \mathcal{I}_k] = \hat{x}'_{k|k} S \hat{x}_{k|k} + tr(SP_{k|k}), \quad \forall S \geq 0 \quad (14)$$

$$E[E[g(x_{k+1}) | \mathcal{I}_{k+1}] | \mathcal{I}_k] = E[g(x_{k+1}) | \mathcal{I}_k], \quad \forall g(\cdot) \quad (15)$$

S_k は symmetric, positive definite or semidefinite matrix で, $k=N$ のとき, $S_N = W_N$ optimal value function $V_k(x_k)$ は次のように定義される.

$$V_k(x_k) \triangleq \min E[x_k' W_N x_k + u' U_k u_k + V_{k+1}(x_{k+1}) | \mathcal{I}_k] \quad (16)$$

$$V_N(x_N) \triangleq E[x_N' W_N x_N | \mathcal{I}_N] \quad (17)$$

dynamic programming theory より $\min_{u_0 \dots u_{N-1}} J_N = V_0(x_0)$.

value function $V_k(x_k)$ を次のように表せるとするとする.

$$V_k(x_k) = E[x_k' S_k x_k | \mathcal{I}_k] + c_k, \quad k = 0, \dots, N \quad (18)$$

ここで, c_k は scalar で, S_k, c_k は \mathcal{I}_k と独立である. $k=N$ のとき, $S_N = W_N, c_N = 0$ となる.
 $k+1$ でこれが成り立っている, つまり

$$V_{k+1}(x_{k+1}) = E[x_{k+1}' S_{k+1} x_{k+1} | \mathcal{I}_{k+1}] + c_{k+1} \quad k = 0, \dots, N \quad (19)$$

であるとする, k 以下では,

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= \min E[x_k' W_k x_k + u' U_k u_k + V_{k+1}(x_{k+1}) | \mathcal{I}_k] \\ &= \min E[x_k' W_k x_k + u' U_k u_k + E[x_{k+1}' S_{k+1} x_{k+1} + c_{k+1} | \mathcal{I}_{k+1}] | \mathcal{I}_k] \\ &= \min E[x_k' W_k x_k + u' U_k u_k | \mathcal{I}_k] + E[(Ax_k + Bu_k)' S_{k+1} (Ax_k + Bu_k) | \mathcal{I}_k] \\ &\quad + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \min E[u_k' (B' S_{k+1} B + U_k) u_k + u_k' B' S_{k+1} A x_k + x_k' A' S_{k+1} B u_k | \mathcal{I}_k] \\ &\quad + E[x_k' W_k x_k + x_k' A' S_{k+1} A x_k | \mathcal{I}_k] + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= E[x_k' W_k x_k + x_k' A' S_{k+1} A x_k | \mathcal{I}_k] + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] + \min(u_k' (U_k + B' S_{k+1} B) u_k \\ &\quad + 2u_k' B' S_{k+1} A \hat{x}_{k|k}) \end{aligned} \quad (20)$$

value function は quadratic なので式 (20) が最小となる条件は $\frac{\partial V_k}{\partial u_k} = 0$ とみなせる. このときの input u_k と $V_k(x_k)$ は次ようになる.

$$u_k = -(B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} \quad (21)$$

$$= L_k \hat{x}_{k|k} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= E[x_k' W_k x_k + x_k' A' S_{k+1} A x_k | \mathcal{I}_k] + \text{tr}(S_{k+1} Q) \\ &\quad - \hat{x}_{k|k}' A' S_{k+1} B (B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= E[x_k' W_k x_k + x_k' A' S_{k+1} A x_k - x_k' A' S_{k+1} B (B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} A x_k | \mathcal{I}_k] \\ &\quad + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] + \text{tr}(A' S_{k+1} B (B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} P_{k|k}) \\ &= E[x_k' S_k x_k | \mathcal{I}_k] + c_k \end{aligned} \quad (23)$$

coefficient を比較することで次のように parameter が導かれる.

$$S_k = A' S_{k+1} A + W_k - A' S_{k+1} B (B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} A \quad (24)$$

$$\begin{aligned} c_k &= \text{tr}(A' S_{k+1} B (B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} P_{k|k}) + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \text{tr}((A' S_{k+1} A + W_k - S_k) P_{k|k}) + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{I}_k] \end{aligned} \quad (25)$$

ここまでで, estimation の equation である式 (10)(11) に LQG parameter が含まれない, つまり controller とは独立に estimator を設計することが出来る. これを separation principle という.

$$\mathcal{I}_k = \begin{cases} \mathcal{F}_k \triangleq \{y^k, \gamma^k, \nu^{k-1}\}, & TCP\text{-like protocol} \\ \mathcal{G}_k \triangleq \{y^k, \gamma^k\}, & UDP\text{-like protocol} \end{cases} \quad (27)$$

$$y^k = (y_k, y_{k-1}, \dots, y_1)$$

$$\gamma^k = (\gamma_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_1)$$

$$\nu^k = (\nu_k, \nu_{k-1}, \dots, \nu_1)$$

(γ_k, ν_k) は Bernoulli random variable で 0 または 1 の値をとることができる独立な random variable で、それぞれ controller と actuator の間, sensr と controller の間の packet-loss の model を表している。 (γ_k, ν_k) の probability は既知で

$$P(\gamma_k = 1) = \bar{\gamma}_k \quad (28)$$

$$P(\nu_k = 1) = \bar{\nu}_k \quad (29)$$

$$(30)$$

とする。

5 TCP-like protocol

TCP case system は式 (27) の information set \mathcal{F}_k を従うので, Kalman Filter は次のようになる。
Prediction

$$\hat{x}_{k+1|k} \triangleq E[x_{k+1} | \nu_k, \mathcal{F}_k] = A\hat{x}_{k|k} + \nu_k B u_k \quad (31)$$

$$e_{k+1|k} \triangleq x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} = A e_{k|k} + w_k \quad (32)$$

$$P_{k+1|k} \triangleq E[e_{k+1|k} e'_{k+1|k} | \nu_k, \mathcal{F}_k] = A P_{k|k} A' + Q \quad (33)$$

Measurement update

$$\hat{x}_{k+1|k+1} \triangleq \hat{x}_{k+1|k} + \gamma_{k+1} K_{k+1} (y_{k+1} - C \hat{x}_{k+1|k}) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} e_{k+1|k+1} &\triangleq x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k+1} \\ &= (I - \gamma_{k+1} K_{k+1} C) e_{k+1|k} - \gamma_{k+1} K_{k+1} \nu_{k+1} \end{aligned} \quad (35)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - \gamma_{k+1} K_{k+1} C P_{k+1|k} \quad (36)$$

$$K_{k+1} \triangleq P_{k+1|k} C' (C P_{k+1|k} C' + R)^{-1} \quad (37)$$

$$(38)$$

もし, $\gamma_k = 1$ で一定なら packet-loss のない stochastic system の Kalman filter と同じ equation になる。
続いて, TCP case system の LQG を説明する。

Value function

$$V_N(x_N) \triangleq E[x'_N W_N x_N | \mathcal{F}_N] \quad (39)$$

$$V_k(x_k) \triangleq \min E[x'_k W_k x_k + \nu_k u' U_k u_k + V_{k+1}(x_{k+1}) | \mathcal{F}_k] \quad (40)$$

value function $V_k(x_k)$ は次のように表せる。

$$V_k(x_k) = E[x_k' S_k x_k] + c_k \quad k = 0, \dots, N \quad (41)$$

式 (40)(41) より次のように計算できる.

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= \min E[x_k' W_N x_k + \nu_k u' U_k u_k + V_{k+1}(x_{k+1}) | \mathcal{F}_k] \\ &= \min E[x_k' W_k x_k + \nu_k u' U_k u_k + E[x_{k+1}' S_{k+1} x_{k+1} | \mathcal{F}_{k+1}] + c_{k+1} | \mathcal{F}_k] \\ &= \min E[x_k' W_k x_k + \nu_k u' U_k u_k + (Ax_k + \nu_k B u_k)' S_{k+1} (Ax_k + \nu_k B u_k) | \mathcal{F}_k] + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{F}_k] \\ &= \bar{\nu}_k \min E[u_k' (B' S_{k+1} B + U_k) u_k + u_k' B' S_{k+1} A x_k + x_k' A' S_{k+1} B u_k | \mathcal{F}_k] + \\ &\quad E[x_k' W_k x_k + x_k' A' S_{k+1} A x_k | \mathcal{F}_k] + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{F}_k] \end{aligned} \quad (42)$$

これが最小となるのは $\frac{\partial V_k}{\partial u_k} = 0$ を満たすときである. このとき, input u_k は

$$\begin{aligned} u_k &= -(B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} \\ &= L_k \hat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (43)$$

この u_k を式 (42) に代入して, 係数比較をすると次の関係が得られる.

$$S_k = A' S_{k+1} A + W_k - \bar{\nu}_k A' S_{k+1} B (B' S_{k+1} B + U_k)^{-1} B' S_{k+1} A \quad (44)$$

$$c_k = \text{tr}((A' S_{k+1} A + W_k - S_k) P_{k|k}) + \text{tr}(S_{k+1} Q) + E[c_{k+1} | \mathcal{F}_k] \quad (45)$$

式 (36)(37) また, 式 (43)(44)(45) から TCP case system は optimal controller が linear で表され, separation principle を満たしていることがわかる.

6 UDP-like protocol

UDP case system は式 (27) の information set \mathcal{G}_k に従うので, Kalman filter は次のようになる.

Prediction

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &\triangleq E[x_{k+1} | \mathcal{G}_k] = E[Ax_k + \nu_k B u_k + w_k | \mathcal{G}_k] \\ &= AE[x_k | \mathcal{G}_k] + E[\nu_k] B u_k \\ &= A \hat{x}_{k|k} + \bar{\nu} B u_k \end{aligned} \quad (46)$$

$$e_{k+1|k} \triangleq x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} = Ae_{k|k} + w_k \quad (47)$$

$$P_{k+1|k} \triangleq E[e_{k+1|k} e_{k+1|k}' | \mathcal{G}_k] = AP_{k|k} A' + Q + \bar{\nu}(1 - \bar{\nu}) B u_k u_k' B' \quad (48)$$

Measurement update

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &\triangleq \hat{x}_{k+1|k} + \gamma_{k+1} K_{k+1} (y_{k+1} - C \hat{x}_{k+1|k}) \\ e_{k+1|k+1} &\triangleq x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k+1} \end{aligned} \quad (49)$$

$$= (I - \gamma_{k+1} K_{k+1} C) e_{k+1|k} - \gamma_{k+1} K_{k+1} v_{k+1} \quad (50)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - \gamma_{k+1} K_{k+1} C P_{k+1|k} \quad (51)$$

$$K_{k+1} \triangleq P_{k+1|k} C' (C P_{k+1|k} C' + R)^{-1} \quad (52)$$

ここで式 (48) から, error covariance $P_{k+1|k}$ が TCP case と異なり control input u_k に依存しており, UDP case system では separation principle が成り立たないことがわかる.

続いて, UDP case の LQG controller が nonlinear となる例を紹介する.

式 (26) の parameter をそれぞれ $A = 1, B = 1, C = 1, W_N = W_k = 1, U_k = 0, R = 1, Q = 0$ とした simple scalar system を扱う.

$k=N-1$ のとき value function $V_k(x_k)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
V_{N-1}(x_{N-1}) &= \min E[x_{N-1}^2 + V_N(x_N) | \mathcal{G}_{N-1}] \\
&= \min E[x_{N-1}^2 + x_N^2 | \mathcal{G}_{N-1}] \\
&= \min (E[x_{N-1}^2 + x_N^2 | \mathcal{G}_{N-1}] + \bar{\nu} u_{N-1}^2 + 2\bar{\nu} u_{N-1} \hat{x}_{N-1|N-1}) \\
&= 2E[x_{N-1}^2 | \mathcal{G}_{N-1}] - \bar{\nu} \hat{x}_{N-1|N-1}^2 \\
&= (2 - \bar{\nu})E[x_{N-1}^2 | \mathcal{G}_{N-1}] + \bar{\nu} P_{N-1|N-1}
\end{aligned} \tag{53}$$

これを optimize する input は

$$u_{N-1} = -\hat{x}_{N-1|N-1} \tag{54}$$

となり, $k=N-1$ では controller はまだ linear であることがわかる.

次に, $k=N-2$ のときの $V_k(x_k)$ は,

$$\begin{aligned}
V_{N-2}(x_{N-2}) &= \min E[x_{N-2}^2 + V_{N-1}(x_{N-1}) | \mathcal{G}_{N-2}] \\
&= E[(3 - \bar{\nu})x_{N-2}^2 | \mathcal{G}_{N-2}] + \bar{\gamma} + \bar{\nu} P_{N-2|N-2} + \bar{\nu}(1 - \bar{\gamma})P_{N-2|N-2} \\
&\quad + \min (\bar{\nu}(2 - \bar{\nu})u_{N-2}^2 + 2\bar{\nu}(2 - \bar{\nu})u_{N-2}\hat{x}_{N-2|N-2} + \bar{\nu}^2(1 - \bar{\nu})(1 - \bar{\gamma})n_{N-2}^2 \\
&\quad + \bar{\nu}\bar{\gamma} \frac{1}{P_{N-2|N-2} + \bar{\nu}(1 - \bar{\nu})u_{N-2}^2 + 1})
\end{aligned} \tag{55}$$

となり, nonlinear な項が現れ, controller は nonlinear となってしまう.

6.1 UDP-like Special case

UDP case の controller は一般的に nonlinear だが $R=0, C$ が invertible となる special case では controller は linear になる. この special case では state x_k が noise の影響を受けずに measurement できる.

Kalman filter は以下のような simple equation になる.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + \bar{\nu}Bu_k + \gamma_{k+1}K_{k+1}(x_{k+1} - (A\hat{x}_{k|k} + \bar{\nu}Bu_k)) \tag{56}$$

$$K_{k+1} = I \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
P_{k+1|k+1} &= (1 - \gamma_{k+1})P_{k+1|k} \\
&= (1 - \gamma_{k+1})(A'P_{k|k}A + Q + \bar{\nu}(1 - \bar{\nu})Bu_k u_k' B')
\end{aligned} \tag{58}$$

$$E[P_{k+1|k+1} | \mathcal{G}_k] = (1 - \bar{\gamma})(A'P_{k|k}A + Q + \bar{\nu}(1 - \bar{\nu})Bu_k u_k' B') \tag{59}$$

value function 次のように表す.

$$V_k(x_k) = \hat{x}_k' S_k \hat{x}_k | \mathcal{G}_k + \text{tr}(T_k P_{k|k}) + \text{tr}(D_k Q) \tag{60}$$

k=N のとき

$$V_N(x_N) = E[x'_N W_N x_N | \mathcal{G}_N] = \hat{x}'_{N|N} W_N \hat{x}_{N|N} + tr(W_N P_{N|N}) \quad (61)$$

上の式 (60)(61) から $S_N = W_N, T_N = W_N, D_N = 0$ とわかる. 式 (60) を書き直して,

$$V_k(x_k) = E[x'_k W_k x_k | \mathcal{G}_k] + tr((T_k - S_k) P_{k|k}) + tr(D_k Q) \quad (62)$$

となる. k+1 でこの式を満たしているとする k において,

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= \min E[x'_k W_N x_k + u' U_k u_k + V_{k+1}(x_{k+1})] \\ &= \hat{x}'_{k|k} (W_k + A' S_{k+1} A) \hat{x}_{k|k} + tr((D_{k+1} + (1 - \bar{\gamma}) T_{k+1} + \bar{\gamma} S_{k+1}) Q) \\ &\quad + tr((W_k + \bar{\gamma} A' S_{k+1} A + (1 - \bar{\gamma}) A T_{k+1} A') P_{k|k}) \\ &\quad + \bar{\nu} \min(u'_k (U_k + B'((1 - \bar{\alpha}) S_{k+1} + \bar{\alpha} T_{k+1}) B) u_k + 2u'_k B' S_{k+1} A \hat{x}_{k|k}) \end{aligned} \quad (63)$$

ここで $\bar{\alpha} = (1 - \bar{\nu})(1 - \bar{\gamma})$.

このとき, $\frac{\partial V_k}{\partial u_k} = 0$ を与える u_k は

$$\begin{aligned} u_k &= -(U_k + B'((1 - \bar{\alpha}) S_{k+1} + \bar{\alpha} T_{k+1}) B)^{-1} B' S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} \\ &= L_k \hat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (64)$$

となり, input u_k が linear になる. また, この input を式 (63) に代入すると式 (62)(63) から,

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= \hat{x}'_{k|k} (W_k + \bar{\gamma} A' S_{k+1} A - \bar{\nu} \hat{x}'_{k|k} A' S_{k+1} B L_k) \hat{x}_{k|k} \\ &\quad + tr((D_{k+1} + (1 - \bar{\gamma}) T_{k+1} + \bar{\gamma} S_{k+1}) Q) + \\ &\quad + tr((W_k + A' S_{k+1} A + (1 - \bar{\gamma}) A T_{k+1} A') P_{k|k}) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} S_k &= A' S_{k+1} A + W_k - \bar{\nu} A' S_{k+1} B (U_k + B' \\ &\quad ((1 - \bar{\alpha}) S_{k+1} + \bar{\alpha} T_{k+1}) B)^{-1} B' S_{k+1} A \\ &= \Phi^s(S_{k+1}, T_{k+1}) \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} T_k &= (1 - \bar{\gamma}) A' T_{k+1} A + \bar{\gamma} A' S_{k+1} A + W_k \\ &= \Phi^T(S_{k+1}, T_{k+1}) \end{aligned} \quad (67)$$

$$D_k = (1 - \bar{\gamma}) T_{k+1} + \bar{\gamma} S_{k+1} + D_{k+1} \quad (68)$$

が得られる.

7 Summary

stochastic system での control は Kalman filter と LQG によって行うことができる. しかし, packet-loss を考慮した system では, TCP case と UDP case とで設計される Kalman filter と LQG が異なる. TCP case では separation principle を満たし, LQG controller gain が linear になるが, UDP case では separation principle を満たさず, 一般的に LQG controller gain は nonlinear になる. しかし, special case の UDP case では, LQG controller gain が linear になる.

8 Appendix

式 (13)(14)(15) の証明を下に簡単に示す。
はじめに、式 (13) の証明を示す。

$$\begin{aligned} E[(x_k - \hat{x}_{k|k})\hat{x}'_{k|k}|\mathcal{I}_k] &= E[x_k\hat{x}'_{k|k} - \hat{x}_{k|k}\hat{x}'_{k|k}|\mathcal{I}_k] \\ &= E[x_k|\mathcal{I}_k]\hat{x}'_{k|k} - \hat{x}_{k|k}\hat{x}'_{k|k} = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

ここで、definition 式 (3) を用いている。
次に、式 (14) の証明を示す。

$$\begin{aligned} E[x'_k S x_k |\mathcal{I}_k] &= E[(x_k - \hat{x}_{k|k} + \hat{x}_{k|k})' S (x_k - \hat{x}_{k|k} + \hat{x}_{k|k}) |\mathcal{I}_k] \\ &= E[\hat{x}'_k S \hat{x}_k + (x_k - \hat{x}_{k|k})' S (x_k - \hat{x}_{k|k}) + 2\hat{x}'_k S (x_k - \hat{x}_{k|k}) |\mathcal{I}_k] \\ &= \hat{x}'_k S \hat{x}_k + E[(x_k - \hat{x}_{k|k})' S (x_k - \hat{x}_{k|k}) |\mathcal{I}_k] + 2E[\hat{x}'_k S (x_k - \hat{x}_{k|k}) |\mathcal{I}_k] \\ &= \hat{x}'_k S \hat{x}_k + 2tr(SE[(x_k - \hat{x}_{k|k})\hat{x}'_{k|k}|\mathcal{I}_k]) + tr(SE[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})'|\mathcal{I}_k]) \\ &= \hat{x}'_k S \hat{x}_k + tr(SP_{k|k}) \end{aligned} \quad (70)$$

ここで、式 (70) について少し補足しておく。
次の vector x と matrix S を考える。

$$\begin{aligned} x &\triangleq [X_1, X_2, \dots, X_n]' \\ S &\triangleq [S_{ij}] \end{aligned}$$

これから、 $x' S x$, $S x x'$ についてそれぞれ成分計算すると

$$\begin{aligned} x' S x &= \sum_{j=1}^n X_j \sum_{i=1}^n S_{ij} X_i \\ S x x' &= [\sum_{k=1}^n S_{ik} X_k X_j] \\ tr(S x x') &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n S_{ij} X_j X_i \\ &= \sum_{j=1}^n X_j \sum_{i=1}^n S_{ij} X_i \end{aligned}$$

以上より、 $x' S x = tr(S x x')$ が得られ、これを用いて式 (70) が導かれる。
最後に、式 (15) の証明を示す。

(X, Y, Z) を random vector, $g(\cdot)$ を任意の function, p は probability distribution である。このとき、

$$\begin{aligned} E_{Y,Z}[g(X, Y, Z)|X] &= \int_Z \int_Y g(X, Y, Z) p(Y, Z|X) dY dZ \\ &= \int_Z \int_Y g(X, Y, Z) p(Y|Z, X) p(Z|X) dY dZ \\ &= \int_Z \left[\int_Y g(X, Y, Z) p(Y|Z, X) dY \right] p(Z|X) dZ \\ &= E_Z[E_Y[g(X, Y, Z)|Z, X]|X] \end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{I}_k = X, \mathcal{I}_{k+1} = (X, Z)$ とすると, (15) と等しくなる.

参考文献

- [1] M.Franceschetti K.Poola S.S.Sastry B.Sinopoli, L.Schenato, “Optimal control with unreliable communication:the tcp case,” *American Control Conference Portland*, 2005.
- [2] M.Franceschetti K.Poola S.Sastry B.Sinopoli, L.Schenato, “An lqg optimal linear controller for control systems with packet losses,” *IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, 2005.
- [3] B.Sinopoli, “Lqg control with missing observation and control packets,” in *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.
- [4] P.M.Makila, *Kalman Filtering and Linear Quadratic Gaussian Control Part1-Kalman Filtering*, Institute of Automation and Control Tampere University of Technology, <http://www.ac.tut.fi/aci/courses/7604120/stoch04oct06.pdf>, 2004.
- [5] P.M.Makila, *Kalman Filtering and Linear Quadratic Gaussian Control Part2-Linear Quadratic Gaussian Control*, Institute of Automation and Control Tampere University of Technology, <http://www.ac.tut.fi/aci/courses/7604120/iistoch04nov15.pdf>, 2004.
- [6] G.Bishop G.Welch, “An introduction to the kalman filter,” *Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill*, 2004.
- [7] B.Sinopoli, *Packet-based Control:the UDP-like case*, Dept of Electrical Engineering,Stanford University,University of California at Berkeley, <http://www.cds.caltech.edu/rol.slides.pdf>, 2006.