



## FLゼミ資料

## Consensus問題と行列理論について

2006年6月12日

藤田研究室 五十嵐 裕司



## Consensus問題について

## Consensus問題の主な2つの解法 (Solution of Consensus Problem)

## 前回まで内容

- ・ポテンシャル関数に基づく解法 (Potential function base)
  - リヤプノフの安定定理 (Lyapunov theorem)
  - ラ・サールの不変原理 (LaSalle invariant principle)

## 今回の内容 (Today's Presentation)

- ・行列理論に基づく解法 (Matrix Analysis Base)
  - 固有値解析 (Eigenvalue analysis)
- ・周波数応答に基づく方法 (Frequency domain analysis)
  - 極配置 (Pole assignment)
  - ナイキストの安定判別法 (Nyquist stability criterion)



## 数学的基礎 (Fundamental Mathematical Theory)

## 固有値解析 (eigenvalue analysis)

## 定理 (theorem)

クーラン・フィシャーのミニマックスの定理  
(Courant-Fischer minimax theorem)

エルミート行列  $A \in C^{n \times n}$  (または実対称行列  $A \in R^{n \times n}$ )

の固有値の大きい順に  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  と並べる。

ただし、重複固有値も重複回数だけ数え上げる。このとき

$$\lambda_k = \min_{\dim S \leq k-1} \max_{x \in S^\perp, \|x\|=1} x^T A x$$

である。ただし、 $S \subset C^n$  (または  $S \subset R^n$ ) は部分空間である。

(大田快人: システム制御のための数学(1) pp. 125)

## ゲルシゴーリンの定理 (Gersgorin's theorem)



## 数学的基礎 (Fundamental Mathematical Theory)

## ゲルシゴーリンの定理 (Gersgorin's theorem)

(児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論 pp. 284)

行列  $A = [a_{ij}] \in C^{n \times n}$  が与えられたとき複素  $s$  平面で  $2n$  個の円盤

$$R_i := \{s \in C; |s - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|\}$$

および

$$S_j := \{s \in C; |s - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|\}$$

を考える。  $A$  のすべての固有値は複素平面の領域

$$T = \left( \bigcup_{i=1}^n R_i \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^n S_j \right) \quad T \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^n R_i \right) \quad T \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^n S_i \right)$$

に存在する

例 (example)(大田快人:システム制御のための数学(1) pp. 191)

Now Consider

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

A の固有値(eigenvalue)

$$\lambda = -1 \quad \lambda = -5 \pm \sqrt{3}i$$

Calculate

$$R_i := \{s \in \mathbb{C}; |s - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}$$

$i = 1$

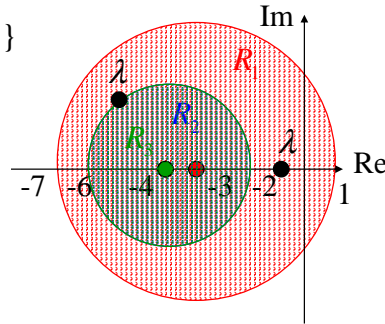
$$R_1 := \{s \in \mathbb{C}; |s + 3| \leq 4\}$$

$i = 2$

$$R_2 := \{s \in \mathbb{C}; |s + 4| \leq 2\}$$

$i = 3$

$$R_3 := \{s \in \mathbb{C}; |s + 4| \leq 2\}$$



確率行列(stochastic matrix)

確率行列: 各列の要素の和が1に等しい正方の非負行列  
(stochastic matrix: all of its row-sums(or column-sums) are 1)

$$\rightarrow P1 = 1 \quad P: \text{確率行列 (stochastic matrix)}$$

$$1 = [1, \dots, 1]^T$$

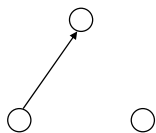
(児玉, 須田:システム制御のためのマトリクス理論 pp. 307)

例 (example)

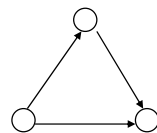
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

グラフの例(example of graph)

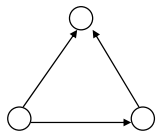
Disconnected



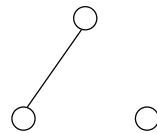
balanced



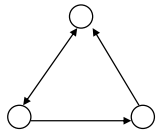
Weakly connected



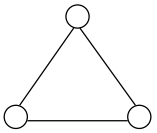
Disconnected symmetric



Strongly connected



Strongly connected



行列理論を使ったconsensus問題の証明

Dynamics

$$\dot{x} = -Lx \quad -L: \text{グラフラプラジアン(graph laplacian)}$$

Is stable

$\longleftrightarrow -L$  の全ての固有値が複素平面の左半平面にある。  
(ただし, 1つだけなら虚軸にあっても良い)

(All the eigenvalues of  $-L$  have negative real-parts)

例 (example)

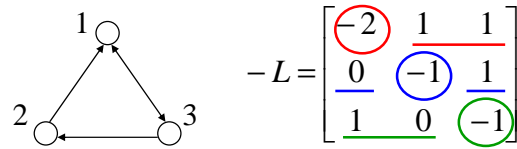
$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -L = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



## 行列理論を使ったconsensus問題の証明

Tokyo Institute of Technology

例 (example)



にグリシゴールの定理を適用すると

$i = 1$

$$R_1 := \{s \in \mathbb{C}; |s+2| \leq 2\}$$

$i = 2$

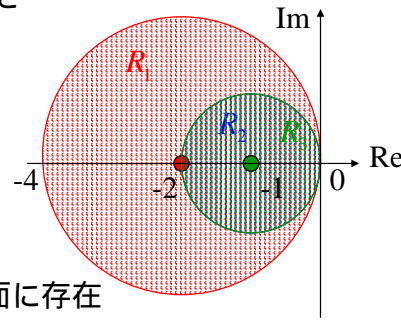
$$R_2 := \{s \in \mathbb{C}; |s+1| \leq 1\}$$

$i = 3$

$$R_3 := \{s \in \mathbb{C}; |s+1| \leq 1\}$$

➡  $-L$ の固有値は全て左半平面に存在

(All the eigenvalues of  $-L$  are located in left-half plane)



Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## 行列理論を使ったconsensus問題の証明

Tokyo Institute of Technology

一般的にはグラフラプラジアン(graph laplacian)の性質を使う。

性質 (property)

$$1, L = [l_{ij}] := D - A \text{ より } l_{ii} > 0 \quad \forall i$$

➡  $-L = [-l_{ij}] \quad -l_{ii} < 0 \quad \forall i$  が成り立つ

$$2, L1 = 0 \quad 1 := [1, \dots, 1]^T \text{ より}$$

➡  $a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$  が成り立つ

この性質とグリシゴールの定理を照らし合わせると

$$\text{性質1より円 } R_i := \{s \in \mathbb{C}; |s - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|\}$$

の中心は必ず、左半平面に存在する

性質2より  $R_i$  の半径は原点から中心までの距離に等しい

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## 遅れのあるConsensus問題の証明

Tokyo Institute of Technology

Theorem

Consider a network of integrator agents with equal communication time-delay  $\tau > 0$  in all links.

$$\dot{x}_i = u_i$$

Assume the network topology  $G$  is fixed, undirected, and connected. Then, protocol

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} [x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)]$$

Globally asymptotically solves the average-consensus problem if and only if following conditions are satisfied

$$\tau \in (0, \tau^*) \text{ with } \tau^* = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}(L)}$$

$\lambda_{\max}(L)$ : Maximum eigenvalue of graph laplacian

R.Olfati-Saber and R. Murray

“Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays”  
IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 49, No. 9 2004 pp.1520-1533

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## 遅れのあるConsensus問題の証明

Tokyo Institute of Technology

証明の考え方

$\tau = 0$  ならばシステムは安定. しかしTime-delay  $\tau$  を増加させていくとどこかで不安定となる

➡ ある  $\tau$  で安定限界となる.  
そのときの  $\tau$  を  $\tau^*$  とする

➡  $\tau = \tau^*$  でシステムの極が虚軸上にある

システムの伝達関数

$$G(s) = (sI + e^{-\tau s} L)$$

これより、システムの極は

$$\det(sI + e^{-\tau s} L) = 0$$

をみたく  $s$  の値である.

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## 遅れのあるConsensus問題の証明

Tokyo Institute of Technology

行列式の性質より

$$\begin{aligned} & \det(sI + e^{-\tau s} L) \\ &= \det(T^{-1}(sI + e^{-\tau s} L)T) \\ &= \det(sI + e^{-\tau s} T^{-1} L T) \end{aligned}$$

ここで  $T^{-1} L T$  が対角行列となるように  $T$  を選ぶと

$$= \prod_{i=1}^n (s - e^{-\tau s} \lambda_i) \quad \lambda_i : \text{グラフラプラジアン固有値 (eigenvalue of graph laplacian)}$$

もし、 $\tau = \tau^*$  ならばシステムの極は虚軸上にあるので

$$j\omega - e^{-j\tau^* \omega} \lambda_i = 0$$

となる項が存在する。

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## 遅れのあるConsensus問題の証明

Tokyo Institute of Technology

$j\omega - e^{-j\tau^* \omega} \lambda_i = 0$  を  $\tau$  について解く

$$\begin{aligned} j\omega - e^{-j\tau^* \omega} \lambda_i &= j\omega - \lambda_i (\cos(\tau^* \omega) - j \sin(\tau^* \omega)) \\ &= j\omega - \lambda_i \cos(\tau^* \omega) - j \lambda_i \sin(\tau^* \omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_i \cos(\tau^* \omega) = 0 \\ \omega - \lambda_i \sin(\tau^* \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{が両方とも成り立てばよい}$$

$\lambda_i \cos(\tau^* \omega) = 0$  より  $\cos(\tau^* \omega) = 0$   $\tau^* \omega = \frac{\pi}{2} + n\pi$  が成り立つ

$$\text{これを } \omega - \lambda_i \sin(\tau^* \omega) = 0 \text{ に代入すると}$$

$$\frac{\pi}{2} + n\pi - \tau^* \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^* = \frac{1}{\lambda_i} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)$$

となる。これより  $\tau^* > 0$  となる最小の  $\tau^*$  を計算すると

$$\tau^* = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}(L)}$$

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## Small World network

Tokyo Institute of Technology

**Small-World phenomenon** is a feature of certain complex networks in which any two arbitrary nodes can be connected using a few links.

This means that the average distance between two nodes is relatively small in small-worlds.

In 1998, Watts & Strogatz (WS) introduced a model called **small-world network** with the capability to interpolate between a regular lattice and a random graph using a single parameter  $p$ .

To construct a **small-world network**, one starts with a one-dimensional Lattice on a ring with  $n$  nodes in which every node is connected to its Nearest neighbors up to the range  $k$ . Then, one rewires every link with probability  $p$  by changing one of the end points of a link uniformly at random.

Reza Olfati-Saber "Ultrafast Consensus in Small-World Networks"  
Proc. of the American Control Conference pp.2371-2378 2005

Tokyo Institute of Technology

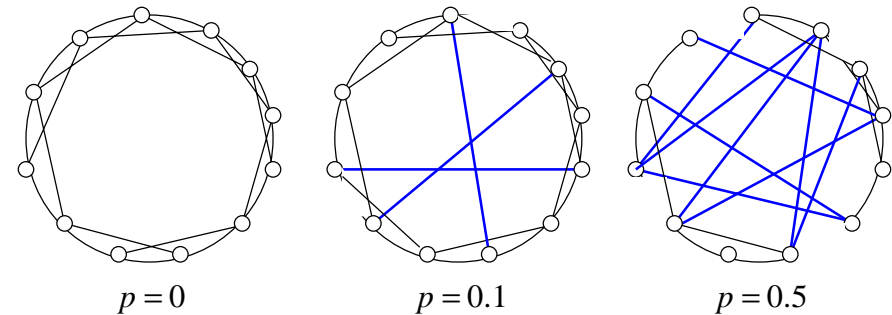
Fujita Laboratory



## Small World network

Tokyo Institute of Technology

one starts with a one-dimensional Lattice on a ring with  $n$  nodes in which every node is connected to its Nearest neighbors up to the range 2



Then, one rewires every link with probability  $p$  by changing one of the end points of a link uniformly at random

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory



## Small World network

Tokyo Institute of Technology

**algebraic connectivity** (second minimum eigenvalue of graph laplacian  $\lambda_2$ ) of a small-world network can be made more than 1000 times greater than a regular network

Particularly, **algebraic connectivity** (second minimum eigenvalue of graph laplacian  $\lambda_2$ ) is the measure of speed of convergence (or performance) of the consensus algorithm



$\lambda_2$  is high  $\rightarrow$  Speed of convergence is high

small-world network have high convergence speed

But

$\lambda_2$  is high  $\rightarrow$   $\lambda_{\max}$  is high

$\rightarrow$  Delay sensitivity is low  $\tau^* = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}(L)}$

Tokyo Institute of Technology

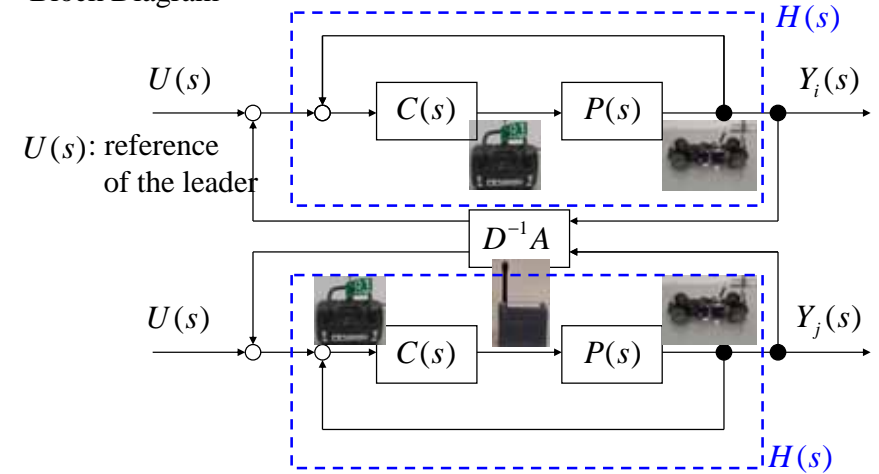
Fujita Laboratory



## Dynamics of Formation Motion

Tokyo Institute of Technology

Block Diagram



$P(s)$  : transfer function  $D$  : degree matrix  $H(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$   
 $C(s)$  : local controller  $A$  : adjacency matrix

Tokyo Institute of Technology

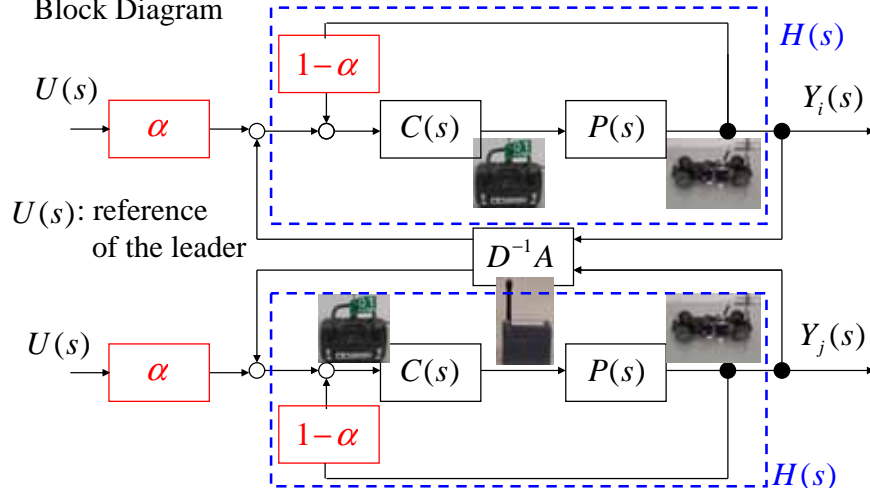
Fujita Laboratory



## Dynamics of Formation Motion

Tokyo Institute of Technology

Block Diagram



$P(s)$  : transfer function  $D$  : degree matrix  $H(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$   
 $C(s)$  : local controller  $A$  : adjacency matrix

Tokyo Institute of Technology

Fujita Laboratory