Synchronization 制御則の Slotine-Li 型への展開

藤田研究室　　米村 大輔

平成 18 年 6 月 12 日

1 はじめに

近年 Consensus Problem [1] 複数の制御対象 (Multi-agent) Coordination の最近の研究結果として Vehicle Formation や Spacecraft のグループ間の姿勢調節などがあげられ, ほかにも Robot Position Synchronization [2] があげられている.

前回までは, Synchronization Control において Paden, Panja 型の受動性に基づく制御則 [3] について述べた. 本レポートでは, Motion Control の基本的な制御側である Paden, Panja の提案した制御則 [4], Slotine, Li の提案した制御則 [5], Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案した Synchronization Control における Paden, Panja 型の受動性に基づく制御則 [3] を比較することで, Slotine, Li 型の受動性に基づく制御則を提案する.

2 ロボットマニピュレータの制御

本節では, ロボットモーションの基本とな受動性に基づく (Passivity-based) ロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) の制御 [6] において, Paden & Panja が提案した制御則 [4] と Slotine & Li が提案した制御則 [5] を比較する.

2.1 制御対象

制御対象としては, n 自由度 (n Degree of Free, n-DOF) をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) を考える. ロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) のダイナミクス (Dymanics) は次式で与えられる [7].

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) \quad = \quad \tau \tag{1}$$

ここで, $q \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate) , $\tau \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques) , $M(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix), $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces), $g(q) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である.

2.2 制御目的

制御目的はロボットマニピュレータの関節角度 (姿勢) q を与えられた目標関節角度 (姿勢) $q_d(t)$ にすることである. つまり, 目標姿勢 (Desired Trajectory) として, 目標関節角度, 角速度を $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} q &= q_d \\ \dot{q} &= \dot{q}_d \end{aligned} \tag{2}$$

とすることである.

2.3 追従制御 (Motion Control)

目標姿勢との偏差 (Error) e, $\dot{e}$, $\ddot{e}$ を次式のようにロボットマニピュレータの姿勢と目標姿勢との差として定義する.

$$\begin{aligned} e &\triangleq q - q_d \\ \dot{e} &\triangleq \dot{q} - \dot{q}_d \\ \ddot{e} &\triangleq \ddot{q} - \ddot{q}_d \end{aligned} \tag{3}$$

2.3.1 Paden, Panja の提案 [4]

新しい制御入力 (New Control Input) を ν として, コントローラ (Controller) τ を次式のように与える.

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q,\dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_p e + \nu \tag{4}$$

ここで, K_p はコントローラゲイン (Gain) である.

さらに, 新しい制御入力 (New Control Input) ν を次式のように与える.

$$\nu = -K_d \dot{e} \tag{5}$$

ここで, K_d はコントローラゲイン (Gain) である.

コントローラ τ (4) に新しい入力 ν (5) を適用すると次式のようになる.

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q,\dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_d\dot{e} - K_p e \tag{6}$$

よって, ロボットマニピュレータ (1) , コントローラ τ (4) , 新しい制御入力 ν (5) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる.

$$M(q)\ddot{e} = -C(q,\dot{q})\dot{e} - K_d\dot{e} - K_p e \tag{7}$$

結果 1 ロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) (1), コントローラ (Controller) (6) によって形成される閉ループ系 (Closed-loop System) (7) について考える. もし, ゲイン K_p, K_d が正定行列であるなら (Assumption : $K_p > 0$, $K_d > 0$), 偏差 (Error) e, $\dot{e}$ は漸近安定 (Asymptotically Stable) となる.

証明

ロボットマニピュレータ (1) とコントローラ (6) によって構成される開ループ系は次式のようになる.

$$M(q)\ddot{e} + C(q,\dot{q})\dot{e} + K_p e = \nu \tag{8}$$

Subsystem に対するエネルギー関数 V を次式のように与える.

$$V(e,\dot{e}) = \frac{1}{2}\dot{e}^T M(q)\dot{e} + \frac{1}{2}eK_p e \tag{9}$$

ゲイン K_d, K_p が正定行列より, エネルギー関数 V は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V (9) の時間微分 (Time Derivative) は

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e,\dot{e}) &= \frac{1}{2}\left(\ddot{e}^T M(q)\dot{e} + \dot{e}^T \dot{M}(q)\dot{e} + \dot{e}^T M(q)\ddot{e}\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{e}^T K_p e + e^T K_p \dot{e}\right) \\
&= \dot{e}^T M(q)\ddot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{M}(q)\dot{e} + eTK_p\dot{e} \\
&= \dot{e}^T M(q)M(q)^{-1}\left(-C(q,\dot{q})\dot{e} - K_p e + \nu\right) + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{M(q)}\dot{e} + e^T K_p \dot{e} \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{開ループ系 (8) より} \\ \quad \ddot{e} = M(q)^{-1}\left(-C(q,\dot{q})\dot{e} - K_p e + \nu\right) \end{array}\right) \\
&= -\dot{e}^T C(q,\dot{q})\dot{e} - \dot{e}^T K_p e + \dot{e}^T\nu + \frac{1}{2}\dot{e}^T\dot{M}(q)\dot{e} + e^T K_p\dot{e} \\
&= \dot{e}^T\nu + \frac{1}{2}\dot{e}^T\left(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)\dot{e} \\
&= \dot{e}^T\nu \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew} - \text{Symmetric) より} \\ \quad \dot{e}^T\left(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)\dot{e} = 0 \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

となる．ここで, エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ (10) において, 開ループ系 (8) を適用するが, この時の開ループ系の形が重要であり, それによって歪み対称性が利用でき, 入力 ν と出力 $\dot{e}$ の積が現れる．よって, 入力 ν と出力 $\dot{e}$ の内積は

$$\begin{aligned}\int_0^t \dot{e}^T(\zeta)\nu(\zeta)d\zeta &= \int_0^t \dot{V}(e(\zeta),\dot{e}(\zeta))d\zeta \\ &= V(e(t),\dot{e}(t)) - V(e(0),\dot{e}(0)) \\ &\geq -V(e(0),\dot{e}(0)) \end{aligned} \tag{11}$$

となり, Subsystem の入力 ν から出力 $\dot{e}$ に関して受動的 (Passive) であることをがわかる．

ここで, リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, Subsystem のエネルギー関数 (Energy Function) (9) を考える．ここで, 新しい制御入力 (New Control Input) ν (5) を適用すると,

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,\dot{e}) &= \dot{e}^T(-K_d\dot{e}) \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

となり, 半負定 (Negative semi-definite) となる． したがって, ラサールの不変性原理 ($LaSalle's\ Invariant\ Principle$) を使うことによって, 偏差 (Error) e, $\dot{e}$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える．

2.3.2 Slotine, Li の提案 [5]

補助変数 $\dot{q}_r$ を次式のように定義する．

$$\dot{q}_r \triangleq \dot{q}_d - \Lambda e \tag{13}$$

ここで, Λ は対角正定行列であるとする．

Sliding Variable s を次式のように定義する．

$$s \triangleq \dot{q} - \dot{q}_r \tag{14}$$

Sliding Variable s は補助変数 $\dot{q}_r$ (13) より, 次式のように書き直せる．

$$s = \dot{e} + \Lambda e \tag{15}$$

新しい入力を ν として, コントローラ τ を次式のように与える．

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q,\dot{q})\dot{q}_r + g(q) - K_p e + \nu \tag{16}$$

ここで, K_p はコントローラゲインである．

さらに, 新しい入力 (New Control Input) ν を次式のように与える．

$$\nu = -K_d s \tag{17}$$

ここで, K_d はコントローラゲイン (Gain) である．

コントローラ τ (16) に新しい入力 ν (17) を適用すると次式のようになる．

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q,\dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_d s - K_p e \tag{18}$$

よって, ロボットマニピュレータ (1) , コントローラ τ (16) , 新しい制御入力 ν (17) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる．

$$M(q)\dot{s} = -C(q,\dot{q})s - K_d s - K_p e \tag{19}$$

結果 2　ロボットダイナミクス (1), コントローラ (18) によって形成される閉ループ系について考える．もし, ゲイン K_d, K_p, Λ が正定対角行列であるなら, Sliding Variable s, 偏差 e は大域的に漸近安定である．

証明

ロボットマニピュレータ (1) とコントローラ (18) によって構成される Subsystem は次式のようになる．

$$M(q)\dot{s} + C(q,\dot{q})s + K_p e \quad = \quad \nu \tag{20}$$

Subsystem に対するエネルギー関数 V を次式のように与える．

$$V(e,s) \quad = \quad \frac{1}{2}s^T M(q)s + \frac{1}{2}eK_p e \tag{21}$$

ゲイン K_d, K_p が正定行列より, エネルギー関数 V は正定関数 (Positive Function) であることがわかる．エネルギー関数 V (21) の時間微分 (Time Derivative) は

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e,s) &= \frac{1}{2}\left(\dot{s}^T M(q)s + s^T\dot{M}(q)s + s^T M(q)\dot{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{e}^T K_p e + e^T K_p \dot{e}\right) \\
&= s^T M(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T\dot{M}(q)s + eTK_p\dot{e} \\
&= s^T M(q)M(q)^{-1}\left(-C(q,\dot{q})s - K_p e + \nu\right) + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{M(q)}\dot{e} + e^T K_p \dot{e} \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{開ループ系 (20) より} \\ \quad \dot{s} = M(q)^{-1}\left(-C(q,\dot{q})s - K_p e + \nu\right) \end{array}\right) \\
&= -s^T C(q,\dot{q})s - s^T K_p e + s^T\nu + \frac{1}{2}s^T\dot{M}(q)s + e^T K_p\dot{e} \\
&= s^T\nu + \frac{1}{2}s^T\left(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)s - \left(\dot{e} + \Lambda e\right)^T K_p e + \dot{e}^T K_p e \\
&= s^T\nu - e^T\Lambda K_p e \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew} - \text{Symmetric) より} \\ \quad \dot{e}^T\left(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)\dot{e} = 0 \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{22}$$

となる．ここで, エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ (22) において, 開ループ系 (20) を適用するが, この時の開ループ系の形が重要であり, それによって歪み対称性が利用でき, 入力 ν と出力 s の積が現れる．よって, 入力 ν と出力 s の内積は

$$\begin{aligned}
\int_0^t \dot{e}^T(\zeta)\nu(\zeta)d\zeta &= \int_0^t \left(\dot{V}(e(\zeta),\dot{e}(\zeta)e(\zeta)^T\Lambda K_p e(\zeta)\right))d\zeta \\
&= V(e(t),\dot{e}(t)) - V(e(0),\dot{e}(0)) + \int_0^t e(\zeta)^T\Lambda K_p e(\zeta)d\zeta \\
&\qquad \left(\because\ \ \Lambda > 0,\ K_p > 0\ \right) \\
&\geq -V(e(0),\dot{e}(0))
\end{aligned} \tag{23}$$

となり, Subsystem の入力 ν から出力 s に関して受動的 (Passive) であることをがわかる．

ここで, リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, Subsystem のエネルギー関数 (Energy Function) (21) を考える．ここで, 新しい制御入力 (New Control Input) ν (17) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e,s) &= s^T(-K_d s) - e^T\Lambda K_p e \\
&= -s^T K_d s - e^T\Lambda K_p e \\
&< 0
\end{aligned} \tag{24}$$

となり, 負定 (Negative semi-definite) となる．したがって, Sliding 変数 s と偏差 (Error) e の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える．

ここで, Sliding Variable s の定義 (14) より, $e \to 0$, $s \to 0$ より, $\dot{e} \to 0$ となる．したがって, 偏差 (Error) e, $\dot{e}$ は漸近安定 (Asymptotically Stable) となる．

Slotine, Li の提案[5]

偏差 e (3)

$$e \triangleq q - q_d$$

補助変数 $\dot{q}_r$ (13) (Λ : 正定対角行列)

$$\dot{q}_r \triangleq \dot{q}_d - \Lambda e$$

Sliding Variable s (14)

$$s \triangleq \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{e} + \Lambda e$$

コントローラ τ (16)
(ν : 新しい入力, K_p : コントローラゲイン)

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q,\dot{q})\dot{q}_r + g(q) - K_p e + \nu$$

新しい入力 ν (17) (K_d : コントローラゲイン)

$$\nu = -K_d s$$

開ループ系 (20)

$$M(q)\dot{s} + C(q,\dot{q})s + K_p e = \nu$$

閉ループ系 (19)

$$M(q)\dot{s} = -C(q,\dot{q})s - K_d s - K_p e$$

エネルギー関数 V (21)

$$V(e,s) = \frac{1}{2}s^T M(q)s + \frac{1}{2}eK_p e$$

エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ (22)

$$\dot{V}(e,s) = s^T\nu - e^T\Lambda K_p e$$

Paden, Panja の提案[4]

偏差 e (3)

$$e \triangleq q - q_d$$

補助変数 $\dot{q}_r$ に 対応するもの

$$\dot{q}_r \iff \underline{\dot{q}_d}$$

Sliding Variable s に 対応するもの

$$s \iff \underline{\dot{e}}$$

— 変数を 対応するもの に変えると —

コントローラ τ (4)
(ν : 新しい入力, K_p : コントローラゲイン)

$$\tau = M(q)\underline{\ddot{q}_d} + C(q,\dot{q})\underline{\dot{q}_d} + g(q) - K_p e + \nu$$

新しい入力 ν (5) (K_d : コントローラゲイン)

$$\nu = -K_d\underline{\dot{e}}$$

開ループ系 (8)

$$M(q)\underline{\ddot{e}} + C(q,\dot{q})\underline{\dot{e}} + K_p e = \nu$$

閉ループ系 (7)

$$M(q)\underline{\ddot{e}} = -C(q,\dot{q})\underline{\dot{e}} - K_d\underline{\dot{e}} - K_p e$$

エネルギー関数 V (9)

$$V(e,\underline{\dot{e}}) = \frac{1}{2}\underline{\dot{e}}^T M(q)\underline{\dot{e}} + \frac{1}{2}eK_p e$$

エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ (10)

$$\dot{V}(e,\underline{\dot{e}}) = \underline{\dot{e}}^T\nu$$

2.4 比較

2.3 節であげた Paden, Panja の提案した制御則 [4] と Slotine, Li の提案した制御則 [5] をまとめる.

ここで, Paden, Panja の提案した制御則 [4] と Slotine, Li の提案した制御則 [5] を比べると, 次のような特徴がある.

- コントローラ τ 〜 エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ までを見比べると, Slotine, Li の補助変数 $\dot{q}_r$ (13) は Paden, Panja の目標角速度 $\dot{q}_d$ に, Sliding Variable s (14) は偏差 $\dot{e}$ (3) に対応しており, $\Lambda = 0$ の時に一致することがわかる.

- Slotine, Li の補助変数 $\dot{q}_r$ (13) , Sliding Variable s (14) は Paden, Panja の目標角速度 $\dot{q}_d$, 速度偏差 $\dot{e}$ (3) に対して, 偏差 e を Λ 倍して加えている.

- 共通 : 受動性が成り立つような開ループ系の形 (7), (19)

- 相違 : リアプノフ関数の時間微分 $\dot{V}$ (10), (22) において, Slotine, Li の提案 [5] (22) ではラサールの不変性原理 ($LaSalle's\ Invariant\ Principle$) を使わずに漸近安定がいえる.

3　Paden & Panya 型の Synchronization 制御

本章では, 文献 [3] で提案されている制御則と, その基となった制御則 [4] を比較する.

制御対象としては, (1) 式のように表される n (n Degree of Freedom, n-DOF) 自由度をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) を p 台考え, ロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) はすべて同一のものとする. i 番目のロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) のダイナミクス (Dymanics) は次式で与えられる.

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) \quad = \quad \tau_i \ , \qquad i = 1, \ldots, p \tag{25}$$

ここで, $q_i \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate) , $\tau_i \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques) , $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix) , $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces) , $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である.

すべてのロボットマニピュレータ (Robot Manipurator) (25) に対し共通の目標軌道 (Common Desired Trajectory) として, 共通の目標関節角度, 角速度を q_d, $\dot{q}_d$ とおく.

ここで, 各ロボットマニピュレータはすべてのロボットマニピュレータと通信することで, すべてのロボットマニピュレータの関節角度, 角速度, 角加速度 q_i, $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ を得ることができると仮定する.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する目標値信号 (Reference Signal) q_{ri}, $\dot{q}_{ri}$, $\ddot{q}_{ri}$ を次式のように定義する.

$$\begin{aligned}
q_{ri} &\triangleq q_d - \sum_{j=1, j\neq i}^{p} K_{i,j}(q_i - q_j) \\
\dot{q}_{ri} &\triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1, j\neq i}^{p} K_{i,j}(\dot{q}_i - \dot{q}_j) \\
\ddot{q}_{ri} &\triangleq \ddot{q}_d - \sum_{j=1, j\neq i}^{p} K_{i,j}(\ddot{q}_i - \ddot{q}_j)
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで, ゲイン $K_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は半正定対角行列 (Positive Semi-dfinite Diagonal Matrix) である.

また, 目標値信号 (Reference Signal) の定義には各ロボットマニピュレータの結合のされ方が現れている.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $\ddot{s}_i$ を次式のように定義する.

$$\begin{aligned}
e_{si} &\triangleq q_i - q_{ri} \\
\dot{e}_{si} &\triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{ri} \\
\ddot{e}_{si} &\triangleq \ddot{q}_i - \ddot{q}_{ri}
\end{aligned} \tag{27}$$

次式のように偏差, ゲイン $K_{i,j}$ を再定義する.

$$\begin{aligned}
e_{ij} &= \begin{cases} q_i - q_d & , i = j \\ q_i - q_j & , i \neq j \end{cases} \\
K_{i,j} &= \begin{cases} I & , i = j \\ K_{i,j} & , i \neq j \end{cases}
\end{aligned} \tag{28}$$

Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $\ddot{s}_i$ (27) に目標値信号 (Reference Signal) q_{ri}, $\dot{q}_{ri}$, $\ddot{q}_{ri}$ (26) を代入すると,

$$\begin{aligned}
e_{si} &\triangleq q_i - q_{ri} \\
&= \sum_{j=1}^{p} K_{i,j}\ddot{e}_{ij}
\end{aligned} \tag{29}$$

ここで, $q_1 = \ldots = q_p = q_d$, $\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_p = \dot{q}_d$ となれば, (28) 式より, $e_{ij} = 0$, $\dot{e}_{ij} = 0$ となり, $s_i = 0$, $\dot{s}_i = 0$ となることがわかる. つまり,

$$q_1 = \ldots = q_p = q_d \quad \Rightarrow \quad s_i = 0$$

$$\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_p = \dot{q}_d \quad \Rightarrow \quad \dot{s}_i = 0 \tag{30}$$

が成立する.

i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) を ν_i としてコントローラ (Controller) τ_i を次式のように与える.

$$\tau_i \quad = \quad M_i(r_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{r,i}e_{si} + \nu_i \tag{31}$$

ここで, $K_{p,i}$ はコントローラゲインである.

さらに, i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i を次式のように与える.

$$\nu_i \quad = \quad -K_{d,i}\dot{e}_{si} \tag{32}$$

ここで, $K_{d,i}$ はコントローラゲインである.

i 番目のロボットマニピュレータにおいて, コントローラ τ_i (31) に新しい制御入力 ν_i (32) を適用すると次式のようになる.

$$\tau_i \quad = \quad M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{d,i}\dot{e}_{si} - K_{p,i}e_{si} \tag{33}$$

よって, i 番目のロボットマニピュレータ (25) とそれに対するコントローラ τ_1 (31), 新しい制御入力 ν_i (32) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる.

$$M_i(q_i)\ddot{e}_{si} \quad = \quad -C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{e}_{si} - K_{d,i}\dot{e}_{si} - K_{p,i}e_{si} \ , \qquad i = 1,\ldots,p \tag{34}$$

定理 1 ロボットダイナミクス *(25)*, コントローラ *(33)*, 目標値信号 *(26)* によって形成される閉ループ系 *(34)* について考える. もし, ゲイン $K_{d,i}$, $K_{p,i}$, $i = 1,\ldots,p$ が正定行列であるなら, *Synchronization Error* e_{si}, $\dot{e}_{si}$, $i = 1,\ldots,p$ は大域的に漸近安定である.

証明

i 番目のロボットマニピュレータ (25) とコントローラ (33) によって構成される Subsystem i は次式のようになる.

$$M_i(q_i)\ddot{e}_{si} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{e}_{si} + K_{p,i}e_{si} \quad = \quad \nu_i \ , \ i = 1,\ldots,p \tag{35}$$

各 Subsystem i に対するエネルギー関数 V_i を次式のように与える.

$$V_i(e_{si},\dot{e}_{si}) \quad = \quad \frac{1}{2}\dot{e}_{si}^T M_i(q_i)\dot{e}_{si} + \frac{1}{2}\dot{e}_{si}K_{p,i}e_{si} \tag{36}$$

ゲイン $K_{d,i}$, $K_{p,i}$, $i = 1,\ldots,p$ が正定行列より, エネルギー関数 V_i は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V_i (36) の時間微分 (Time Derivative) は 2.3.1 節の Paden, Panja の提案の証明の (10) 式と同様に, 閉ループ系 (35) , と歪み対称性 (Skew-Symmetric) を使うことにより, 入力 ν_i と出力 $\dot{e}_{si}$ の積として表せる.

$$\dot{V}_i(e_{si},\dot{e}_{si}) \quad = \quad \dot{e}_{si}^T\nu_i \tag{37}$$

よって, 入力 ν_i と出力 $\dot{e}_{si}$ の内積は

$$\int_0^t \dot{e}_{si}^T(\zeta)\nu_i(\zeta)d\zeta \quad \geq \quad -V_i(e_{si}(0),\dot{e}_{si}(0)) \tag{38}$$

となり, Subsystem i の入力 ν_i から出力 $\dot{e}_{si}$ に関して受動的 (Passive) であることをがわかる.

ここで, リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, Subsystem のエネルギー関数 (Energy Function) (36) の和を考える.

$$\begin{aligned} V(e_s, \dot{e}_s) &= \sum_{i=1}^{p} V_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{si}^T M_i(q_i) \dot{e}_{si} + \frac{1}{2} e_{si} K_{p,i} e_{si} \right) \end{aligned} \tag{39}$$

ここで, $e_s = [e_{s1}, \ldots, e_{sp}]^T$, $\dot{e}_s = [\dot{e}_{s1}, \ldots, \dot{e}_{sp}]^T$ とする. 各 Subsystem i に対するエネルギー関数 V_i (36) が正定関数であることから, エネルギー関数 (Energy Function) V も正定関数である. エネルギー関数 (Energy Function) V (39) の時間微分 (Time Derivative) は (37) 式より,

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_s, \dot{e}_s) &= \sum_{i=1}^{p} \dot{V}_i(e_{si}, \dot{e}_{si}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\dot{e}_{si}^T \nu_i \right) \\ &= \dot{e}_s^T \nu \end{aligned} \tag{40}$$

である. ここで, すべての入力は $\nu = [\nu_1, \ldots, \nu_p]$, すべての出力は $\dot{e}_s$ である. すべての入力 ν とすべての出力 $\dot{s}$ の内積は,

$$\int_0^t \dot{e}_s^T(\zeta) \nu(\zeta) d\zeta \quad \geq \quad -V(e_s(0), \dot{e}_s(0)) \tag{41}$$

であり, システム全体としても受動性が成り立っている. ここで, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i (32) を適用すると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_s, \dot{e}_s) &= \sum_{i=1}^{p} \left(\dot{s}_i^T (-K_{d,i} \dot{s}_i) \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \left(\dot{s}_i^T K_{d,i} \dot{s}_i \right) \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{42}$$

となり, 半負定 (Negative semi-definite) となる. したがって, ラサールの不変性原理 ($LaSalle's\ Invariant\ Principle$) もしくは, Barbalat' Lemma を使うことによって, $\dot{V}(e_s, \dot{e}_s) = 0$ を満たす不変集合は原点 $e_s = 0$, $\dot{e}_s = 0$ つまり, $s_i = 0$, $\dot{s}_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$ だけであることが保証される. したがって, Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $i = 1, \ldots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える.

今, 定理 1 より, Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $i = 1, \ldots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言えたが, まだ, Synchronization は言えていない. そこで, 次の補助定理を用いることにより, Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $i = 1, \ldots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) と Synchronization $q_i \to q_j$, $\dot{q}_i \to \dot{q}_j$ ($j = 1, \ldots, p$, $j \neq i$) が等価となることを言う.

補助定理 (44) 式で目標値信号 (26) の Coupling Matrix $K_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, p$ を使って表される対角優勢行列 (Diagonally Dominant Matrix) $M_c(K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times (n \cdot p)}$ について考える. このとき, $M_c(K_{i,j})$ は多構造のシステムにおいてロボット間の Coupling Matrix として考えられる.

行列 $M_c(K_{i,j})$ はすべての半正定対角行列 $K_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, p$ に対して正則である. さらに, すべての半正定対角行列 $K_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, p$ に対して

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \tag{43}$$

の関係を保つ.

$$
M_c(K_{i,j}) \;=\; \begin{bmatrix} \left(I_n + \sum\limits_{j=1, j\neq 1}^{p} K_{1,j}\right) & -K_{1,2} & \cdots & -K_{1,p} \\ -K_{2,1} & \left(I_n + \sum\limits_{j=1, j\neq 2}^{p} K_{2,j}\right) & \cdots & -K_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \\ -K_{p,1} & -K_{p,2} & \cdots & \left(I_n + \sum\limits_{j=1, j\neq p}^{p} K_{p,j}\right) \end{bmatrix} \tag{44}
$$

補助定理において, (44) 式の右側は Synchronization Error の漸近安定 $s_i \to 0$, $\dot{s}_i \to 0$, $t \to \infty$ $(i = 1, \ldots, p)$ を表しており, 左側が Synchronization $q_i \to q_d$, $\dot{q}_i \to \dot{q}_d$ $(i = 1, \ldots, p)$ を意味している. つまり, 補助定理より, Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $i = 1, \ldots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が Synchronization $q_i \to q_j$, $\dot{q}_i \to \dot{q}_j$ $(j = 1, \ldots, p, j \neq i)$ と等価となることが言る. したがって, Synchronization $q_i \to q_j$, $\dot{q}_i \to \dot{q}_j$ $(j = 1, \ldots, p,$ $j \neq i)$ すると言える.

3.1 比較

本章であげた Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案した制御則 [3] をその基礎となった Paden, Panja の提案した制御則 [4] と比較する.

Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案[3]

偏差 e_i (3)

$$e_i \triangleq q_i - q_d$$

目標値信号 $q_{r,i}$ (26) ($K_{i,j}$: 半正定行列)

$$q_{r,i} \triangleq q_d - \sum_{j=1,j\neq i}^{p} K_{i,j}(q_i - q_j)$$

Synchronization Error e_{si} (27)

$$e_{si} \triangleq q_i - q_{ri}\ ,\ i = 1,\ldots,p$$

コントローラ τ_i (31)
(ν_i : 新しい入力, $K_{p,i}$: コントローラゲイン)

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{p,i}e_{si} + \nu_i$$

新しい入力 ν (32) ($K_{p,i}$: コントローラゲイン)

$$\nu_i = -K_{d,i}e_{si}$$

開ループ系 (35)

$$M_i(q_i)\ddot{e}_{si} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{e}_{si} + K_{d,i}\dot{e}_{si} = \nu_i$$

閉ループ系 (34)

$$M_i(q_i)\ddot{e}_{si} = -C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{e}_{si} - K_{d,i}\dot{e}_{si} - K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数 V (39)

$$V(e_s,\dot{e}_s) = \sum_{i=1}^{p} V_i = \dot{e}_s^T M(q)\dot{e}_s + \tfrac{1}{2}e_s K_p e_s$$

$$V_i(e_{si},\dot{e}_{si}) = \dot{e}_{si}^T M_i(q_i)\dot{e}_{si} + \tfrac{1}{2}e_{si}K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数の時間微分 $dotV$ (40)

$$\dot{V}(e_s,\dot{e}_s) = \sum_{i=1}^{p} \dot{V}_i = \dot{e}_s^T \nu$$

$$\dot{V}_i(e_{si},\dot{e}_{si}) = \dot{e}_{si}^T \nu_i$$

Paden, Panja の提案[4]

偏差 e (3)

$$e \triangleq q - q_d$$

目標値信号 $q_{r,i}$ に 対応するもの

$$q_{r,i} \Longleftrightarrow \underline{q_d}$$

Synchronization Error e_{si} に 対応するもの

$$e_{si} \Longleftrightarrow \underline{e}$$

— 変数を 対応するもの に変えると —

コントローラ τ (4)
(ν : 新しい入力, K_p : コントローラゲイン)

$$\tau = M(q)\underline{\ddot{q}_d} + C(q,\dot{q})\underline{\dot{q}_d} + g(q) - K_p\underline{e} + \nu$$

新しい入力 ν (K_d : コントローラゲイン) (5)

$$\nu = -K_d\underline{\dot{e}}$$

開ループ系 (8)

$$M(q)\underline{\ddot{e}} + C(q,\dot{q})\underline{\dot{e}} + K_p\underline{e} = \nu$$

閉ループ系 (7)

$$M(q)\underline{\ddot{e}} = -C(q,\dot{q})\underline{\dot{e}} - K_d\underline{\dot{e}} - K_p\underline{e}$$

リアプノフ関数 V (9)

$$V(\underline{e},\underline{\dot{e}}) = \tfrac{1}{2}\underline{\dot{e}}^T M(q)\underline{\dot{e}} + \tfrac{1}{2}\underline{e}K_p\underline{e}$$

リアプノフ関数の時間微分 $\dot{V}$ (10)

$$\dot{V}(\underline{e},\underline{\dot{e}}) = \underline{\dot{e}}^T\nu$$

ここで, Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案した制御則 [3] と Paden, Panja の提案した制御則 [4] を比べると, 次のような特徴がある.

- コントローラ τ 〜 エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ までを見比べると, Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の目標値信号 $q_{r,i}$ (26) は Paden, Panja の目標角速度 q_d に, Synchronization Error e_{si} (27) は偏差 e (3) に対応しており, $K_{i,j} = 0$ の時に一致することがわかる.
- Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の目標値信号 $q_{r,i}$ (26) , Synchronization Error e_{si} (27) は Paden, Panja の目標角速度 q_d , 偏差 e (3) に対して, 他のロボットの関節角度との偏差 e_{ij} を $K_{i,j}$ 倍して加えている.
- 共通 : 受動性が成り立つような閉ループ系の形 (34), (7)
- 共通 : リアプノフ関数の時間微分 $\dot{V}$ (40), (10) において, ともにラサールの不変性原理 ($LaSalle's\ Invariant\ Principle$) を使って漸近安定をいう.

- 相違：Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案 [3] では, 偏差の漸近安定と Synchronization を補助定理により関連付けている.
  ちなみに, 目標値信号 q_{ri} (26) の定義より, 補助定理が成立する.

4 Slotine & Li 型の Synchronization 制御

問題設定は 3 節と同様である.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する目標値信号 (Reference Signal) q_{ri}, $\dot{q}_{ri}$, $\ddot{q}_{ri}$ は (26) 式と同様, 次式のように定義する.

$$\begin{aligned} q_{ri} &\triangleq q_d - \sum_{j=1, j\neq i}^{p} K_{i,j}(q_i - q_j) \\ \dot{q}_{ri} &\triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1, j\neq i}^{p} K_{i,j}(\dot{q}_i - \dot{q}_j) \\ \ddot{q}_{ri} &\triangleq \ddot{q}_d - \sum_{j=1, j\neq i}^{p} K_{i,j}(\ddot{q}_i - \ddot{q}_j) \end{aligned} \tag{45}$$

ここで, ゲイン $K_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は半正定対角行列 (Positive Semi-dfinite Diagonal Matrix) である.

また, 目標値信号 (Reference Signal) の定義には各ロボットマニピュレータの結合のされ方が現れている.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $\ddot{s}_i$ は (27) 式と同様に次式のように定義する.

$$\begin{aligned} e_{si} &\triangleq q_i - q_{ri} \\ \dot{e}_{si} &\triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{ri} \\ \ddot{e}_{si} &\triangleq \ddot{q}_i - \ddot{q}_{ri} \end{aligned} \tag{46}$$

次式のように偏差, ゲイン $K_{i,j}$ を再定義する.

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \begin{cases} q_i - q_d & , i = j \\ q_i - q_j & , i \neq j \end{cases} \\ K_{i,j} &= \begin{cases} I & , i = j \\ K_{i,j} & , i \neq j \end{cases} \end{aligned} \tag{47}$$

Synchronization Error s_i, $\dot{s}_i$, $\ddot{s}_i$ (46) に目標値信号 (Reference Signal) q_{ri}, $\dot{q}_{ri}$, $\ddot{q}_{ri}$ (45) を代入すると,

$$\begin{aligned} e_{si} &\triangleq q_i - q_{ri} \\ &= \sum_{j=1}^{p} K_{i,j}\ddot{e}_{ij} \end{aligned} \tag{48}$$

ここで, $q_1 = \ldots = q_p = q_d$, $\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_p = \dot{q}_d$ となれば, (47) 式より, $e_{ij} = 0$, $\dot{e}_{ij} = 0$ となり, $s_i = 0$, $\dot{s}_i = 0$ となることがわかる. つまり,

$$\begin{aligned} q_1 = \ldots = q_p = q_d &\Rightarrow s_i = 0 \\ \dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_p = \dot{q}_d &\Rightarrow \dot{s}_i = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

が成立する.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する補助変数 $\dot{q}_{p,i}$ を次式のように定義する.

$$\dot{q}_{pi} \triangleq \dot{q}_{ri} - \Lambda_i e_{si} \tag{50}$$

ここで, Λ_i, $i = 1, \ldots, p$ は対角半正定行列であるとする.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipurator) に対する Sliding 変数 s_i を次式のように定義する.

$$s_i \quad \triangleq \quad \dot{q}_i - \dot{q}_{pi} \tag{51}$$

i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) を ν_i としてコントローラ (Controller) τ_i を次式のように与える.

$$\tau_i \quad = \quad M_i(q_i)\ddot{q}_{pi} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_{pi} + g_i(q_i) - K_{p,i}e_{si} + \nu_i \tag{52}$$

ここで, $K_{p,i}$ はコントローラゲインである.

さらに, i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i を次式のように与える.

$$\nu_i \quad = \quad -K_{d,i}s_i \tag{53}$$

ここで, $K_{d,i}$ はコントローラゲインである.

i 番目のロボットマニピュレータにおいて, コントローラ τ_i (52) に新しい制御入力 ν_i (53) を適用すると次式のようになる.

$$\tau_i \quad = \quad M_i(q_i)\ddot{q}_{pi} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_{pi} + g_i(q_i) - K_{d,i}s_{si} - K_{p,i}e_{si} \tag{54}$$

よって, i 番目のロボットマニピュレータ (25) とそれに対するコントローラ τ_1 (52), 新しい制御入力 ν_i (53) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる.

$$M_i(q_i)\dot{s}_i \quad = \quad -C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i - K_{d,i}s_i - K_{p,i}e_{si}\ , \qquad i = 1,\ldots,p \tag{55}$$

定理 2 ロボットダイナミクス *(25)*, コントローラ *(54)*, 目標値信号 *(45)* によって形成される閉ループ系 *(55)* について考える. もし, ゲイン $K_{d,i}$, $K_{p,i}$, $i = 1,\ldots,p$ が正定行列であるなら, *Sliding* 変数 s_i, $\dot{s}_i$, $i = 1,\ldots,p$ は大域的に漸近安定である.

証明

i 番目のロボットマニピュレータ (25) とコントローラ (54) によって構成される Subsystem i は次式のようになる.

$$M_i(q_i)\dot{s}_i + C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i + K_{p,i}e_{si} \quad = \quad \nu_i\ ,\ i = 1,\ldots,p \tag{56}$$

各 Subsystem i に対するエネルギー関数 V_i を次式のように与える.

$$V_i(e_{si},s_i) \quad = \quad \frac{1}{2}s_i^TM_i(q_i)s_i + \frac{1}{2}e_{si}K_{p,i}e_{si} \tag{57}$$

ゲイン $K_{d,i}$, $K_{p,i}$, $i = 1,\ldots,p$ が正定行列より, エネルギー関数 V_i は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V_i (57) の時間微分 (Time Derivative) は 2.3.2 節の Slotine, Li の提案の証明の (22) 式と同様に, 閉ループ系 (56) , と歪み対称性 (Skew-Symmetric) を使うことにより, 入力 ν_i と出力 s_i の積を用いて表せる.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i(e_{si},s_i) &= \frac{1}{2}\left(\dot{s}_i^TM_i(q_i)s_i + s_i^T\dot{M}_i(q_i)s_i + s_i^TM_i(q_i)\dot{s}_i\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{e}_{si}^TK_{p,i}e_{si} + e_{si}^TK_{p,i}\dot{e}_{si}\right) \\
&= s_i^TM_i(q_i)\dot{s}_i + \frac{1}{2}s_i^T\dot{M}_i(q_i)s_i + e_{si}^TK_{p,i}\dot{e}_{si} \\
&= s_i^TM_i(q_i)M_i(q_i)^{-1}\left(-C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i - K_{p,i}e_{si} + \nu_i\right) + \frac{1}{2}s_i^T\dot{M}_i(q_i)s_i + e_{si}^TK_{p,i}\dot{e}_{si} \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{Subsystem } i \text{ (56) より} \\ \qquad \dot{s}_i = M_i(q_i)^{-1}\left(-C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i - K_{p,i}e_{si} + \nu_i\right) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -s_i^T C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i - s_i^T K_{p,i}e_{si} + s_i^T\nu_i + \frac{1}{2}s_i^T\dot{M}_i(q_i)s_i + e_{si}^T K_{p,i}\dot{e}_{si} \\
&= s_i^T\nu_i + \frac{1}{2}s_i^T\left(\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i,\dot{q}_i)\right)s_i - (\dot{e}_{si}+\Lambda e_{si})^T K_{p,i}e_{si} + \dot{e}_{si}^T K_{p,i}e_{si} \\
&= s_i^T\nu_i - e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si} \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew − Symmetric) より} \\ \quad \dot{s}_i^T\left(\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i,\dot{q}_i)\right)\dot{s}_i = 0 \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{58}
$$

よって, 入力 ν_i と出力 s_i の内積は

$$
\begin{aligned}
\int_0^t s_i^T(\zeta)\nu_i(\zeta)d\zeta &= \int_0^t \left(\dot{V}_i(e_{si}(\zeta),s_i(\zeta)) + e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}\right)d\zeta \\
&\geq V_i(e_{si}(t),s_i(t)) - V_i(e_{si}(0),s_i(0)) \\
&\geq -V_i(e_{si}(0),s_i(0))
\end{aligned} \tag{59}
$$

となり, Subsystem i の入力 ν_i から出力 s_i に関して受動的 (Passive) であることをがわかる.

ここで, リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, Subsystem のエネルギー関数 (Energy Function) (57) の和を考える.

$$
\begin{aligned}
V(e_s,s) &= \sum_{i=1}^p V_i \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{2}\dot{s}_i^T M_i(q_i)\dot{s}_i + \frac{1}{2}s_i K_{p,i}s_i\right)
\end{aligned} \tag{60}
$$

ここで, $e_s = [e_{s1},\dots,e_{sp}]^T$, $s = [s_1,\dots,s_p]^T$ とする. 各 Subsystem i に対するエネルギー関数 V_i (57) が正定関数であることから, エネルギー関数 (Energy Function) V も正定関数である. エネルギー関数 (Energy Function) V (60) の時間微分 (Time Derivative) は (58) 式より,

$$
\dot{V}(e_s,s) = \sum_{i=1}^p \left(s_i^T\nu_i - e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}\right) \tag{61}
$$

である. ここで, すべての入力を $\nu = [\nu_1,\dots,\nu_p]$, すべての出力を s とすると, すべての入力 ν とすべての出力 s の内積は,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t s^T(\zeta)\nu(\zeta)d\zeta &= \int_0^t \sum_{i=1}^p \left(s_i^T(\zeta)\nu_i(\zeta)\right)d\zeta \\
&= \int_0^t \left(\dot{V}(e_s(\zeta),s(\zeta)) + e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}\right)d\zeta \\
&\geq V(e_s(t),s(t)) - V(e_s(0),s(0)) \\
&\geq -V(e_s(0),s(0))
\end{aligned} \tag{62}
$$

であり, システム全体としても受動性が成り立っている. ここで, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i (53) を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(e_s,s) &= \sum_{i=1}^p \left(s_i^T(-K_{d,i}s_i) - e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^p \left(s_i^T K_{d,i}s_i + e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}\right) \\
&< 0
\end{aligned} \tag{63}
$$

となり, 負定 (Negative definite) となる. したがって, Synchronization Error e_{si}, Sliding 変数 s_i, $i=1,\dots,p$ は漸近安定 (Asymptotically Stable) である.

■

今, 定理 2 より, Synchronization Error e_{si}, Sliging 変数 s_i, $i=1,\dots,p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言えた. したがって, Sliging 変数 s_i の定義 (**??**) より, $e_{si}\to 0$ $s_i\to 0$ であれば, $\dot{e}_{si}\to 0$ となることがわかり, Synchronization Error の漸近安定 $e_{si}\to 0$, $\dot{e}_{si}\to 0$, $t\to 0$ $(i=1,\dots,p)$ が言えが, まだ, Synchronization は言えていない. そこで, 3 節の文献 [3] の証明と同様, 補助定理を用いることで, Synchronization Error の漸近安定 $e_{si}\to 0$, $\dot{e}_{si}\to 0$, $t\to\infty$ $(i=1,\dots,p)$ が $q_i\to q_d$, $\dot{q}_i\to\dot{q}_d$ $(i=1,\dots,p)$ と等価となることが言える. したがって, Synchronization $q_i\to q_j$, $\dot{q}_i\to\dot{q}_j$ $(j=1,\dots,p,\ j\neq i)$ と等価となることが言える.

4.1 比較

本章で提案した制御則と Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案した制御則 [3] をまとめる.

ここで, 本章で提案した制御則と Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案した制御則 [3] を比べると, 次のような特徴がある.

- コントローラ τ 〜 エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ までを見比べると, 本レポートで提案した補助変数 $\dot{q}_{pi}$ (50) は Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の目標値信号 $\dot{q}_{ri}$ (26) に, Sliding Variable s_i (51) は Synchronization Error $\dot{e}_{si}$ (27) に対応しており, $\Lambda_i=0$ の時に一致することがわかる. これは 2 説で紹介した Paden, Panja と Slotine, Li の対応と同様に Rodriguez-Angeles, Nijmeijer から発展させせたことを示している.

- 本レポートで提案した補助変数 $\dot{q}_{pi}$ (50) , Sliding Variable s_i (51) は Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の目標値信号 $\dot{q}_{ri}$ (26) , Synchronization Error $\dot{e}_{si}$ (27) に対して, 偏差 e_{si} を Λ_i 倍して加えている.

- 共通 : 受動性が成り立つような開ループ系の形 (55), (34)

- 相違 : リアプノフ関数の時間微分 $\dot{V}$ (61), (40) において, 本レポートでの提案 (61) ではラサールの不変性原理 ($LaSalle's\ Invariant\ Principle$) を使わずに漸近安定がいえる.

- 共通 : 目標値信号 q_{ri} (45), (26) の定義より, 補助定理によって偏差の漸近安定と Synchronization を関連付けている.

本レポートでの提案

偏差 e_i (3)

$$e_i \triangleq q_i - q_d$$

目標値信号 $\dot{q}_{r,i}$ (45) ($K_{i,j}$：半正定行列)

$$\dot{q}_{r,i} \triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1,j\neq i}^{p} K_{i,j}(q_i - q_j)$$

Synchronization Error s_i (46)

$$e_{si} \triangleq q_i - q_{ri}\ ,\ i = 1, \ldots, p$$

補助変数 q_{pi} (50)

$$\dot{q}_{pi} \triangleq \dot{q}_{ri} - \Lambda_i e_{si}\ ,\ i = 1, \ldots, p$$

Sliding 変数 s_i (51)

$$s_i \triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{pi}\ ,\ i = 1, \ldots, p$$

コントローラ τ_i (52)

(ν_i：新しい入力, $K_{p,i}$：コントローラゲイン)

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{pi} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{pi} + g_i(q_i) - K_{p,i}e_{si} + \nu_i$$

新しい入力 ν_i (53) ($K_{p,i}$：コントローラゲイン)

$$\nu_i = -K_{d,i}s_i$$

開ループ系 (56)

$$M_i(q_i)\dot{s}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)s_i + K_{p,i}e_{si} = \nu_i$$

閉ループ系 (55)

$$M_i(q_i)\dot{s}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)s_i - K_{d,i}s_i - K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数 V (60)

$$V(e_s, s) = \sum_{i=1}^{p} V_i = s^T M(q)s + \tfrac{1}{2}e_s K_p e_s$$

$$V_i(e_{si}, s_i) = s_i^T M_i(q_i)s_i + \tfrac{1}{2}e_{si}K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数の時間微分 $\dot{V}$ (61)

$$\dot{V}(e_s, \dot{e}_s) = \sum_{i=1}^{p} \dot{V}_i = \dot{s}^T\nu - e_s^T\Lambda K_p e_s$$

$$\dot{V}_i(e_{si}, s_i) = s_i^T\nu_i - e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}$$

Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案[3]

偏差 e_i (3)

$$e_i \triangleq q_i - q_d$$

目標値信号 $\dot{q}_{r,i}$ (26) ($K_{i,j}$：半正定行列)

$$\dot{q}_{ri} \triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1,j\neq i}^{p} K_{i,j}(q_i - q_j)$$

Synchronization Error e_{si} (27)

$$e_{si} \triangleq q_i - q_{ri}\ ,\ i = 1, \ldots, p$$

補助変数 $\dot{q}_{pi}$ に 対応するもの

$$\dot{q}_{pi} \iff \underline{\dot{q}_{ri}}$$

Sliding 変数 s_i に 対応するもの

$$s_i \iff \underline{\dot{e}_{si}}$$

— 変数を 対応するもの に変えると —

コントローラ τ_i (31)

(ν_i：新しい入力, $K_{p,i}$：コントローラゲイン)

$$\tau_i = M_i(q_i)\underline{\ddot{q}_{ri}} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\underline{\dot{q}_{ri}} + g_i(q_i) - K_{p,i}e_{si} + \nu_i$$

新しい入力 ν_i (32) ($K_{p,i}$：コントローラゲイン)

$$\nu_i = -K_{d,i}\underline{e_{si}}$$

開ループ系 (35)

$$M_i(q_i)\underline{\ddot{e}_{si}} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\underline{\dot{e}_{si}} + K_{p,i}e_{si} = \nu_i$$

閉ループ系 (34)

$$M_i(q_i)\underline{\ddot{e}_{si}} = -C_i(q_i, \dot{q}_i)\underline{\dot{e}_{si}} - K_{d,i}\underline{\dot{e}_{si}} - K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数 V (39)

$$V(e_s, \underline{\dot{e}_s}) = \sum_{i=1}^{p} V_i = \underline{\dot{e}_s}^T M(q)\underline{\dot{e}_s} + \tfrac{1}{2}e_s K_p e_s$$

$$V_i(e_{si}, \underline{\dot{e}_{si}}) = \underline{\dot{e}_{si}}^T M_i(q_i)\underline{\dot{e}_{si}} + \tfrac{1}{2}e_{si}K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数の時間微分 $dotV$ (40)

$$\dot{V}(e_s, \underline{\dot{e}_s}) = \sum_{i=1}^{p} \dot{V}_i = \underline{\dot{e}_s}^T\nu$$

$$\dot{V}_i(e_{si}, \underline{\dot{e}_{si}}) = \underline{\dot{e}_{si}}^T\nu_i$$

次に, 本章で提案した制御則と Slotine, Li の提案した制御則 [3] を比べると, 次のような特徴がある.
ここで, 本章で提案した制御則と Slotine, Li の提案した制御則 [5] を比べると, 次のような特徴がある.

- コントローラ τ 〜 エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ までを見比べると, 本レポートで提案した目標値信号 q_{ri} (45) は Slotine, Li の目標角速度 q_d に, Synchronization Error e_{si} (46) は偏差 e (3) に対応しており, $K_{i,j} = 0$ の時に一致することがわかる. これは, 3 節で紹介したように, Rodriguez-Angeles, Nijmeijer が Paden, Panja から発展させたものと同様である. さらに, 補助変数 q_{pi} (50) は補助変数 q_r (13) に, Sliding 変数 s_i (51) は Sliding 変数 s (14) に対応している. これは, 本レポートでの提案は 2 説で紹介した Paden, Panja と Slotine, Li の対応と同様に Rodriguez-Angeles, Nijmeijer から発展させたことを示している.
- 本レポートで提案した目標値信号 q_{pi} (45) , Synchronization Error e_{si} (46) は Slotine, Li の目標角速度 q_d , 偏差 e (3) に対して, 他のロボットの関節角度との偏差 e_{ij} を $K_{i,j}$ 倍して加えている. これも, 3 節で紹介したように, Rodriguez-Angeles, Nijmeijer が Paden, Panja から発展させたものと同様に発展させている.
- 共通 : 受動性が成り立つような閉ループ系の形 (55), (19)
- 共通 : リアプノフ関数の時間微分 $\dot{V}$ (61), (22) において, ともにラサールの不変性原理 ($LaSalle's\ Invariant\ Principle$) を使わずに漸近安定が言える.
- 相違 : 本レポートの提案では, 偏差の漸近安定と Synchronization を補助定理により関連付けている.
  ちなみに, 目標値信号 q_{ri} (45) の定義より, 補助定理が成立する.

本レポートでの提案

偏差 e_i (3)

$$e_i \triangleq q_i - q_d$$

目標値信号 $\dot{q}_{r,i}$ (45) ($K_{i,j}$: 半正定行列)

$$\dot{q}_{r,i} \triangleq \dot{q}_d - \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{p} K_{i,j}(q_i - q_j)$$

Synchronization Error s_i (46)

$$e_{si} \triangleq q_i - q_{ri}\ ,\ i = 1,\ldots,p$$

補助変数 q_{pi} (50)

$$\dot{q}_{pi} \triangleq \dot{q}_{ri} - \Lambda_i e_{si}\ ,\ i = 1,\ldots,p$$

Sliding 変数 s_i (51)

$$s_i \triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{pi}\ ,\ i = 1,\ldots,p$$

コントローラ τ_i (52)
(ν_i : 新しい入力, $K_{p,i}$: コントローラゲイン)

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{pi} + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_{pi} + g_i(q_i) - K_{p,i}e_{si} + \nu_i$$

新しい入力 ν_i (53) ($K_{p,i}$: コントローラゲイン)

$$\nu_i = -K_{d,i}s_i$$

開ループ系 (56)

$$M_i(q_i)\dot{s}_i + C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i + K_{p,i}e_{si} = \nu_i$$

閉ループ系 (55)

$$M_i(q_i)\dot{s}_i = -C_i(q_i,\dot{q}_i)s_i - K_{d,i}s_i - K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数 V (60)

$$V(e_s,s) = \sum_{i=1}^{p} V_i = s^T M(q)s + \tfrac{1}{2}e_s K_p e_s$$

$$V_i(e_{si},s_i) = s_i^T M_i(q_i)s_i + \tfrac{1}{2}e_{si}K_{p,i}e_{si}$$

リアプノフ関数の時間微分 $dotV$ (61)

$$\dot{V}(e_s,\dot{e}_s) = \sum_{i=1}^{p} \dot{V}_i = \dot{s}^T\nu - e_s^T\Lambda K_p e_s$$

$$\dot{V}_i(e_{si},s_i) = s_i^T\nu_i - e_{si}^T\Lambda K_{p,i}e_{si}$$

Slotine, Li の提案[5]

偏差 e (3)

$$e \triangleq q - q_d$$

目標値信号 $\dot{q}_{ri}$ に <u>対応するもの</u>

$$\dot{q}_{ri} \Longleftrightarrow \underline{\dot{q}_d}$$

Synchronization Error e_{si} に <u>対応するもの</u>

$$e_{si} \Longleftrightarrow \underline{e}$$

補助変数 $\dot{q}_{pi}$ に <u>対応するもの</u>

$$\dot{q}_{pi} \Longleftrightarrow \underline{\dot{q}_r}$$

Sliding 変数 s_i に <u>対応するもの</u>

$$s_i \Longleftrightarrow \underline{s}$$

— 変数を <u>対応するもの</u> に変えると —

コントローラ τ (16)
(ν : 新しい入力, K_p : コントローラゲイン)

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q,\dot{q})\dot{q}_r + g(q) - K_p e + \nu$$

新しい入力 ν (17) (K_d : コントローラゲイン)

$$\nu = -K_d s$$

開ループ系 (20)

$$M(q)\dot{s} + C(q,\dot{q})s + K_p e = \nu$$

閉ループ系 (19)

$$M(q)\dot{s} = -C(q,\dot{q})s - K_d s - K_p e$$

エネルギー関数 V (21)

$$V(e,s) = \tfrac{1}{2}s^T M(q)s + \tfrac{1}{2}eK_p e$$

エネルギー関数の時間微分 $\dot{V}$ (22)

$$\dot{V}(e,s) = s^T\nu - e^T\Lambda K_p e$$

5　おわりに

本レポートでは, 文献 [3] で提案されている定理の証明ついて述べた.

今後は, シミュレーション, 実験を行っていきたい. さらに, 文献 [3] では Paden & Panja らの受動性に基づく制御則 [4] から拡張した制御側であったが, 今後は Slotine & Li らの受動性に基づく制御則 [5] から拡張した形へ展開し, さらに, ロバスト制御を組み込むことを考える.

参考文献

[1] W. Ren, R. W. Beard and E. M. Atkins, "A Survey of Consensus Problems in Multi-agent Coordination," *Proc. of the 2005 American Control Conference*, pp. 1859–1864, 2005.

[2] A. Rodriguez-Angeles and H. Nijmeijer, "Cooperative Synchronization of Robots via Estimated State Feedback," *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1514–1519, 2003.

[3] A. Rodriguez-Angeles and H. Nijmeijer, "Mutual Synchronization of Robots via Estimated State Feedback : A Cooperative Approach," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 12, No. 4, pp. 542–554, 2004.

[4] B. Paden and R. Panja, "Globally Asymptotically Stable 'PD+' Controller for Robot Manipulators," *Int. J. Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1697–1712, 1988.

[5] J. J.-E. Slotine, W. Li, "On the Adaptive Control of Robot Manipulators," *Int. J. of Robotics Res.*, Vol. 6, pp49–59, 1987.

[6] H. Berghuis and H. Nijmeijer, "A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots," *IEEE Trans. on Robotics and Automation* , Vol. 9, No. 6, pp. 740–754, 1993.

[7] M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasager, *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006.