

ロボットマニピュレータのSynchronization

藤田研究室 米村 大輔

平成 18 年 5 月 19 日

1 はじめに

近年 Consensus Problem [1] 複数の制御対象 (Multi-agent) Coordination の最近の研究結果として Vehicle Formation や Spacecraft のグループ間の姿勢調節などがあげられ, ほかにも Robot Position Synchronization [2] があげられている.

そこで, 本レポートでは, Robot Manipulator の Mutual Synchronization についてまとめられた文献 [3] について述べる. 特に, 本レポートでは, 文献 [3] で提案されている定理の証明について詳しく述べる.

2 Synchronization 制御

制御対象としては, p 台の n (n Degree of Freedom, n-DOF) 自由度をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) を考え, ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) はすべて同一のものとする. i 番目のロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) のダイナミクス (Dynamics) は次式で与えられる.

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

ここで, $q_i \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate), $\tau_i \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques), $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix), $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces), $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である.

すべてのロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) (1) に対し共通の目標軌道 (Common Desired Trajectory) として, 共通の目標関節角度, 角速度を q_d, \dot{q}_d とおく.

ここで, 各ロボットマニピュレータはすべてのロボットマニピュレータと通信することで, すべてのロボットマニピュレータの関節角度, 角速度, 角加速度 $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ ($i = 1, \dots, p$) を得ることができると仮定する.

つまり, ロボットマニピュレータが 4 台の場合の概念図は, Fig. 1 のように示される.

この状況下で, Mutual Synchronization を達成するためのコントローラ $\tau_i, i = 1, \dots, p$ を設計することを目標とする.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する目標値信号 (Reference Signal) $q_{ri}, \dot{q}_{ri}, \ddot{q}_{ri}$ を次式のように定義する.

$$\begin{aligned} q_{ri} &\triangleq q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j) \\ \dot{q}_{ri} &\triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(\dot{q}_i - \dot{q}_j) \\ \ddot{q}_{ri} &\triangleq \ddot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(\ddot{q}_i - \ddot{q}_j) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, ゲイン $K_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は半正定対角行列 (Positive Semi-definite Diagonal Matrix) である.

また, 目標値信号 (Reference Signal) の定義には各ロボットマニピュレータの結合のされ方が現れている.

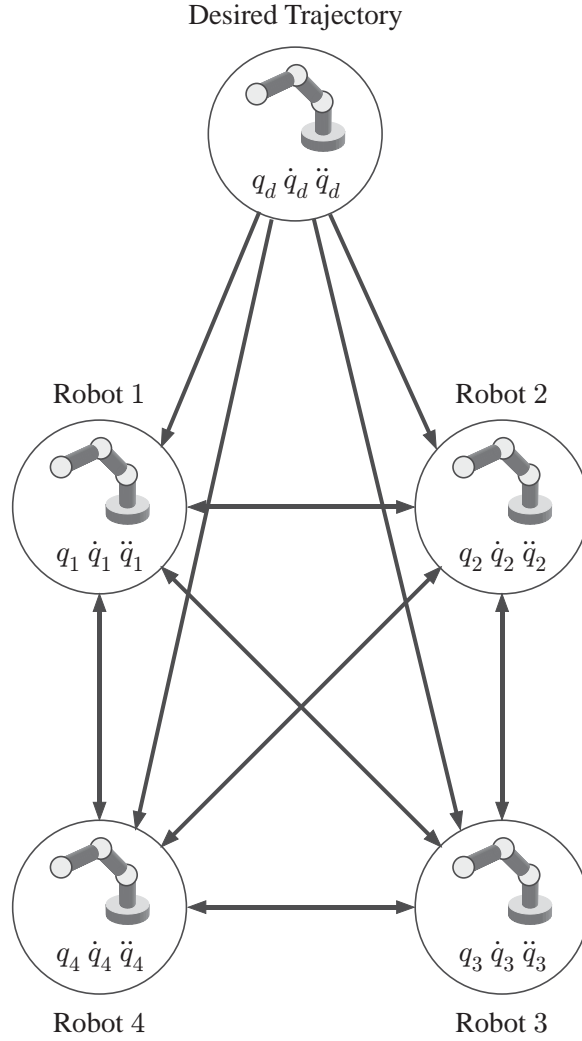


Fig.1: Robot の Mutual Synchronization の概略図

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, \ddot{s}_i$ を次式のように定義する.

$$\begin{aligned}
 s_i &\triangleq q_i - q_{ri} \\
 \dot{s}_i &\triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{ri} \\
 \ddot{s}_i &\triangleq \ddot{q}_i - \ddot{q}_{ri}
 \end{aligned} \tag{3}$$

次式のように偏差, ゲイン $K_{i,j}$ を再定義する.

$$\begin{aligned}
 e_{ij} &= \begin{cases} q_i - q_d, & i = j \\ q_i - q_j, & i \neq j \end{cases} \\
 K_{i,j} &= \begin{cases} I, & i = j \\ K_{i,j}, & i \neq j \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, \ddot{s}_i$ (5) に目標値信号 (Reference Signal) $q_{ri}, \dot{q}_{ri}, \ddot{q}_{ri}$ (2) を代入すると,

$$s_i \triangleq q_i - q_{ri}$$

$$\begin{aligned}
&= q_i - \left\{ q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j) \right\} \\
&= q_i - q_d + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j) \\
&= I(q_i - q_d) + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j) \\
&= Ie_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}e_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^p K_{i,j}e_{ij} \\
\dot{s}_i &\triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{ri} \\
&= \sum_{j=1}^p K_{i,j}\dot{e}_{ij} \\
\ddot{s}_i &\triangleq \ddot{q}_i - \ddot{q}_{ri} \\
&= \sum_{j=1}^p K_{i,j}\ddot{e}_{ij} \tag{5}
\end{aligned}$$

ここで, $q_1 = \dots = q_p = q_d$, $\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_p = \dot{q}_d$ となれば, (4) 式より, $e_{ij} = 0$, $\dot{e}_{ij} = 0$ となり, $s_i = 0$, $\dot{s}_i = 0$ となることからわかる. つまり,

$$\begin{aligned}
q_1 = \dots = q_p = q_d &\Rightarrow s_i = 0 \\
\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_p = \dot{q}_d &\Rightarrow \dot{s}_i = 0 \tag{6}
\end{aligned}$$

が成立する.

i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) を ν_i としてコントローラ (Controller) τ_i を次式のように与える.

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{p,i}s_i + \nu_i \tag{7}$$

ここで, $K_{p,i}$ はコントローラゲインである.

さらに, i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i を次式のように与える.

$$\nu_i = -K_{d,i}\dot{s}_i \tag{8}$$

ここで, $K_{d,i}$ はコントローラゲインである.

i 番目のロボットマニピュレータにおいて, コントローラ τ_i (7) に新しい制御入力 ν_i (8) を適用すると次式のようになる.

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i \tag{9}$$

よって, i 番目のロボットマニピュレータ (1) とそれに対するコントローラ τ_i (7), 新しい制御入力 ν_i (8) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようになる.

$$M_i(q_i)\ddot{s}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i, \quad i = 1, \dots, p \tag{10}$$

定理 1 ロボットダイナミクス (1), コントローラ (9), 目標値信号 (2) によって形成される閉ループ系 (10) について考える. もし, ゲイン $K_{d,i}$, $K_{p,i}$, $i = 1, \dots, p$ が正定行列であるなら, Synchronization Error s_i , \dot{s}_i , $i = 1, \dots, p$ は大域的に漸近安定である.

証明

i 番目のロボットマニピュレータ (1) とコントローラ (7) によって構成される Subsystem i は次式のようになる.

$$M_i(q_i)\ddot{s}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i + K_{p,i}s_i = \nu_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (11)$$

各 Subsystem i に対するエネルギー関数 V_i を次式のように与える.

$$V_i(s_i, \dot{s}_i) = \frac{1}{2}\dot{s}_i^T M_i(q_i)\dot{s}_i + \frac{1}{2}s_i^T K_{p,i}s_i \quad (12)$$

ゲイン $K_{d,i}, K_{p,i}, i = 1, \dots, p$ が正定行列より, エネルギー関数 V_i は正定関数 (Positive Function) であることがわかる. エネルギー関数 V_i (12) の時間微分 (Time Derivative) は

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(s_i, \dot{s}_i) &= \frac{1}{2} \left(\dot{s}_i^T M_i(q_i)\dot{s}_i + \dot{s}_i^T \dot{M}_i(q_i)\dot{s}_i + \dot{s}_i^T M_i(q_i)\ddot{s}_i \right) + \frac{1}{2} (\dot{s}_i^T K_{p,i}s_i + s_i^T K_{p,i}\dot{s}_i) \\ &= \dot{s}_i^T M_i(q_i)\ddot{s}_i + \frac{1}{2}\dot{s}_i^T \dot{M}_i(q_i)\dot{s}_i + s_i^T K_{p,i}\dot{s}_i \\ &= \dot{s}_i^T M_i(q_i)M_i(q_i)^{-1} (-C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - K_{p,i}s_i + \nu_i) + \frac{1}{2}\dot{s}_i^T \dot{M}_i(q_i)\dot{s}_i + s_i^T K_{p,i}\dot{s}_i \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{Subsystem } i \text{ (11) より} \\ \ddot{s}_i = M_i(q_i)^{-1} (-C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - K_{p,i}s_i + \nu_i) \end{array} \right) \\ &= -\dot{s}_i^T C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - s_i^T K_{p,i}s_i + \dot{s}_i^T \nu_i + \frac{1}{2}\dot{s}_i^T \dot{M}_i(q_i)\dot{s}_i + s_i^T K_{p,i}\dot{s}_i \\ &= \dot{s}_i^T \nu_i + \frac{1}{2}\dot{s}_i^T \left(\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i) \right) \dot{s}_i \\ &= \dot{s}_i^T \nu_i \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew-Symmetric) より} \\ \dot{s}_i^T \left(\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i) \right) \dot{s}_i = 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

となる. よって, 入力 ν_i と出力 \dot{s}_i の内積は

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{s}_i^T(\zeta)\nu_i(\zeta)d\zeta &= \int_0^t \dot{V}_i(s_i(\zeta), \dot{s}_i(\zeta))d\zeta \\ &= V_i(s_i(t), \dot{s}_i(t)) - V_i(s_i(0), \dot{s}_i(0)) \\ &\geq -V_i(s_i(0), \dot{s}_i(0)) \end{aligned} \quad (14)$$

となり, Subsystem i の入力 ν_i から出力 \dot{s}_i に関して受動的 (Passive) であることをがわかる.

ここで, リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, Subsystem のエネルギー関数 (Energy Function) (12) の和を考える.

$$\begin{aligned} V(s, \dot{s}) &= \sum_{i=1}^p V_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{2}\dot{s}_i^T M_i(q_i)\dot{s}_i + \frac{1}{2}s_i^T K_{p,i}s_i \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, $s = [s_1, \dots, s_p]^T, \dot{s} = [\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_p]^T$ とする. 各 Subsystem i に対するエネルギー関数 V_i (12) が正定関数であることから, エネルギー関数 (Energy Function) V も正定関数である. エネルギー関数 (Energy Function) V (15) の時間微分 (Time Derivative) は (13) 式より,

$$\dot{V}(s, \dot{s}) = \sum_{i=1}^p (\dot{s}_i^T \nu_i) \quad (16)$$

である. ここで, すべての入力を $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_p]$, すべての出力を \dot{s} とすると, すべての入力 ν とすべての出力 \dot{s} の内積は,

$$\int_0^t \dot{s}^T(\zeta)\nu(\zeta)d\zeta = \int_0^t \sum_{i=1}^p (\dot{s}_i^T(\zeta)\nu_i(\zeta)) d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \dot{V}(s(\zeta), \dot{s}(\zeta)) d\zeta \\
&= V(s(t), \dot{s}(t)) - V(s(0), \dot{s}(0)) \\
&\geq -V(s(0), \dot{s}(0))
\end{aligned} \tag{17}$$

であり, システム全体としても受動性が成り立っている. ここで, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i (8) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(s, \dot{s}) &= \sum_{i=1}^p (\dot{s}_i^T (-K_{d,i} \dot{s}_i)) \\
&= -\sum_{i=1}^p (\dot{s}_i^T K_{d,i} \dot{s}_i) \\
&\leq 0
\end{aligned} \tag{18}$$

となり, 半負定 (Negative semi-definite) となる. したがって, ラサールの不変性原理 (*LaSalle's Invariant Principle*) もしくは, Barbalat' Lemma を使うことによって, Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) を言う.

まず, ラサールの不変性原理 (*LaSalle's Invariant Principle*) を使った場合について説明する.

ラサールの不変性原理を使った場合

リアプノフ関数 V の時間微分 (18) より, $\dot{V} = 0$ となるのは, $\dot{s}_1 = \dots = \dot{s}_p = 0$ の時である. つまり, 不変集合 E においては, $\dot{s} \equiv 0$ となり, $\ddot{s} \equiv 0$ となる. この時, $s_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ と仮定し, 背理法を用いて, 最大の不変集合 M は $s_i = 0, \dot{s} \equiv 0, i = 1, \dots, p$ のみであることを証明する. $s_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ と仮定すると, 閉ループ系 (10) より,

$$0 = -K_{p,i} s_i, i = 1, \dots, p \tag{19}$$

となり, ゲイン $K_{d,i}, K_{p,i}, i = 1, \dots, p$ は正定行列より, 上式を満たすものは $s_i = 0, i = 1, \dots, p$ のみであり, 仮定に矛盾する. よって, 最大の不変集合 M は $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ のみである. したがって, ラサールの不変性原理 (*LaSalle's Invariant Principle*) より, $s_i, \dot{s}_i, i = 1, \dots, p$ は $t \rightarrow \infty$ で M に近づく. つまり, $s_i \rightarrow 0, \dot{s}_i \rightarrow 0, i = 1, \dots, p$ となり, Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える.

また, Barbalat' Lemma を使った場合についても述べる.

Barbalat' Lemma を使った場合

まず, リアプノフ関数の時間微分 \dot{V} (18) が Barbalat' Lemma の関数 ϕ の条件を満たしていることを確認する.

- $V > 0, \dot{V} \leq 0$ より, V は有限の極限をもつ. つまり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{V}(s(\tau), \dot{s}(\tau)) d\tau = -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^p \dot{s}_i(\tau)^T K_{i,d} \dot{s}_i(\tau) \right) d\tau = a \text{ ここで, } a \text{ は定数とする.}$$

- $\dot{V} \leq 0$ より, \dot{s}_i は有界であり, さらに, s_i も有界である. 閉ループ系 (10) より, \ddot{s}_i は s_i, \dot{s}_i に依存するので, \ddot{s}_i は有界である. よって, ,

$$\ddot{V} = -2 \sum_{i=1}^p \dot{s}_i^T K_{i,d} \ddot{s}_i$$

は有界である. したがって, \dot{V} は一様に連続 (uniformly continuous) である.

以上の2つにより, \dot{V} が Barbalat' Lemma の関数 ϕ の条件を満たしていることが確認できた. よって, Barbalat' Lemma より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(s(t), \dot{s}(t)) = 0 \tag{20}$$

したがって, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}_i(t) = 0, i = 1, \dots, p$ となり, 極限をとった時, 閉ループ系は (10),

$$M_i \ddot{s}_i = -K_{p,i} s_i, i = 1, \dots, p \quad (21)$$

となる. ここで, $\lim_{t \rightarrow \infty} s_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ と仮定すると, 上式より, $K_{p,i} > 0, i = 1, \dots, p$ であるので, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ となり, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ で矛盾する. よって, $\dot{V} \equiv 0$ を満たす集合は, 原点 $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ だけである. したがって, Barbalat' Lemma より, Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える. ■

今, 定理 1 より, Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, i = 1, \dots, p$ の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言えたが, まだ, Synchronization は言えていない. そこで, 次の補助定理を用いる.

補助定理 (23) 式で目標値信号 (2) の Coupling Matrix $K_{i,j}, i, j = 1, \dots, p$ を使って表される対角優勢行列 (Diagonally Dominant Matrix) $M_c(K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times (n \cdot p)}$ について考える. このとき, $M_c(K_{i,j})$ は多構造のシステムにおいてロボット間の Coupling Matrix として考えられる.

行列 $M_c(K_{i,j})$ はすべての半正定対角行列 $K_{i,j}, i, j = 1, \dots, p$ に対して正則である. さらに, すべての半正定対角行列 $K_{i,j}, i, j = 1, \dots, p$ に対して

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \quad (22)$$

の関係を保つ.

$$M_c(K_{i,j}) = \begin{bmatrix} \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq 1}^p K_{1,j} \right) & -K_{1,2} & \cdots & -K_{1,p} \\ -K_{2,1} & \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq 2}^p K_{2,j} \right) & \cdots & -K_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \\ -K_{p,1} & -K_{p,2} & \cdots & \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq p}^p K_{p,j} \right) \end{bmatrix} \quad (23)$$

証明 まず, Synchronization Error s_i, \dot{s}_i が漸近安定した場合, つまり, $s_i = 0, \dot{s}_i = 0$ となった場合に, (30) 式の左側の式,

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \quad (24)$$

となることを示す. Synchronization Error s_i の定義 (5), 目標値信号 q_{ri} の定義 (2) より, $s_i = 0, i = 1, \dots, p$ の時

$$\begin{aligned} s_i &= q_i - q_{ri} \\ &= q_i - q_d + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} (q_i - q_j) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$q_i + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} q_i - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} q_j = q_d$$

$$\left(I + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} \right) q_i - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} q_j = q_d$$

$$\begin{bmatrix} -K_{1,j} & \cdots & I + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} & \cdots & -K_{p,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = q_d, \quad i = 1, \dots, p \quad (26)$$

となる。したがって、(24) 式が成り立つ。

次に、行列 M_c が対角優勢であることから、Gerschgorin's Theorem (付録 B) を使って、 $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ の解が一意的に存在することを示す。Gerschgorin's Theorem (付録 B) より、 $M_c(K_{i,j})$ の固有値は次の $n \cdot p$ 個の円 (disk) の和集合の中に存在する。

$$D_{i,r} : D_{i,r} \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j,r}, \sum_{j=1, j \neq i}^p |-K_{i,j,r}| \right), \quad i = 1, \dots, p, r = 1, \dots, n \quad (27)$$

ここで、 $K_{i,j,r}$ はゲイン $K_{i,j}$ の r 番目の対角要素である。 $D_{i,r}(z_{i,r}, w_{i,r}) = \{v_{i,r} \in \mathbb{C} \mid |v_{i,r} - z_{i,r}| \leq w_{i,r}\}$ は、 z は disk の中心、 w は半径を表している。これを図示すると、Fig. 2 のようになる。

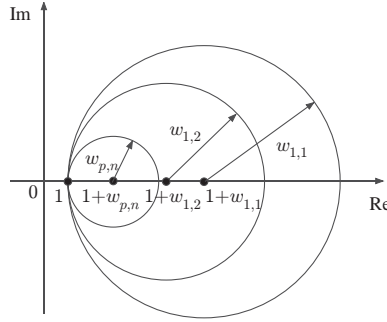


Fig.2: disc D

行列 M_c が対角優勢、目標値信号の定義から $K_{i,j}$ が対角半正定行列より、

$$1 + \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j,r} > \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j,r} \quad (28)$$

であり、円 $D_{i,r}$ の和集合内には零は含まれない。したがって、Gerschgorin's Theorem より、 $M_c(K_{i,j})$ の固有値に零は含まれず、 $M_c(K_{i,j})$ は正則となる。 $M_c(K_{i,j})$ が正則より、(24) 式の解、つまり、 $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ の解が一意的に存在することを示す。ここで、(6) 式より、 $q_1 = \dots = q_p = q_d$ は $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ の解であることがわかる。つまり、

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \quad (29)$$

の関係が成り立つ。今、 $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ の解は一意的にきまるので、 $s_i = 0, \dot{s}_i = 0, i = 1, \dots, p$ の解は

$q_1 = \dots = q_p = q_d$ のみであるので,

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \quad (30)$$

の関係が成り立つ。したがって、(30) 式の関係が保たれる。 ■

補助定理より, Synchronization Error の漸近安定 $s_i \rightarrow 0, \dot{s}_i \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, p$) が $q_i \rightarrow q_d, \dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_d$ ($i = 1, \dots, p$) と等価となることが言える。したがって, Synchronization $q_i \rightarrow q_j, \dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_j$ ($j = 1, \dots, p, j \neq i$) と等価となることが言える。

文献 [3] におけるポイントは次のようである。

- 受動性による安定性
 - 受動性が成り立つような閉ループ系の形 $M\ddot{x} + C\dot{x} = \dots$ になるように, コントローラが提案される。Paden & Panja の受動性に基づく制御則からの発展 (付録 A)。
- Synchronization Error s_i, \dot{s}_i の漸近安定が Synchronization と等価
 - 行列 M_c は対角優勢で, ゲイン $K_{i,j}$ は対角半正定行列であれば, 常に正則となり, 補助定理が成立する。
- 対角優勢行列 M_c
 - 目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} (2) は, 各ロボットの結合の仕方を含んでいる。そして, 対角優勢行列 M_c は目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} によって得られるため, 対角優勢行列 M_c にも各ロボットの結合の仕方が含まれている。

以上のことはすべて, 目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} (2), Synchronization Error s_i (5) の定義によるものである。

3 おわりに

本レポートでは, 文献 [3] で提案されている定理の証明について述べた。

今後は, シミュレーション, 実験を行っていきたい。さらに, 文献 [3] では Paden & Panja らの受動性に基づく制御則 [5] から拡張した制御側であったが, 今後は Slotine & Li らの受動性に基づく制御則 [6] から拡張した形へ展開し, さらに, ロバスト制御を組み込むことを考える。

A 比較

Rodriguez-Angeles, Nijmeijer の提案[3]

偏差 e_i

$$e_i \triangleq q_i - q_d$$

目標値信号 $\dot{q}_{r,i}$ (2) ($K_{i,j}$: 半正定行列)

$$\dot{q}_{r,i} \triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j}(q_i - q_j)$$

Synchronization Error s_i (5)

$$s_i \triangleq q_i - q_{ri}, \quad i = 1, \dots, p$$

コントローラ τ_i (7)

(ν_i : 新しい入力, $K_{p,i}$: コントローラゲイン)

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{p,i}s_i + \nu_i$$

新しい入力 ν (8) ($K_{d,i}$: コントローラゲイン)

$$\nu_i = -K_{d,i}s_i$$

閉ループ系 (10) ($K_{d,i}$: コントローラゲイン)

$$M_i(q_i)\ddot{s}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i$$

リアプノフ関数 V (15)

$$V(s, \dot{s}) = \sum_{i=1}^p V_i$$

$$V_i(s_i, \dot{s}_i) = \frac{1}{2}\dot{s}_i^T M_i(q_i)\dot{s}_i + \frac{1}{2}s_i K_{p,i}s_i$$

Paden, Panja の提案[5]

偏差 e

$$e \triangleq q - q_d$$

目標値信号 $\dot{q}_{r,i}$ に対応するもの

$$\dot{q}_{r,i} \iff \dot{q}_d$$

Synchronization Error s_i に対応するもの

$$s_i \iff \dot{e}$$

— 変数を 対応するもの に変えると —

コントローラ τ

(ν : 新しい入力, K_p : コントローラゲイン)

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_p e + \nu$$

新しい入力 ν (K_d : コントローラゲイン)

$$\nu = -K_d \dot{e}$$

閉ループ系

$$M(q)\ddot{e} = -C(q, \dot{q})\dot{e} - K_d \dot{e} - K_p e$$

リアプノフ関数 V

$$V(e, \dot{e}) = \frac{1}{2}\dot{e}^T M(q)\dot{e} + \frac{1}{2}e K_p e$$

B 数学的準備

次のシステムを考える.

$$\dot{x} = f(x) \tag{31}$$

ここで, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ で f は locally Lipschitz であるとする. このようなシステムに対してラサールの不変性原理は下の形で述べられる.

ラサールの不変性原理 (*LaSalle's Invariant Principle*) [8] $\Omega \subset D$ をシステム (31) に対して, positively invariant でコンパクト (compact) な集合 (set) であるとする. また, $D \rightarrow \mathbb{R}$ を連続微分可能 (differentiable) な関数 (function) であり, Ω 内で, $\dot{V} \leq 0$ となるものとする. E を Ω 内で $\dot{V}(x) = 0$ となるような点の集合とする. また, M を E 内で最も大きい不変集合とする. すると Ω 内から始まるシステム (31) の解は $t \rightarrow \infty$ で M に近づく.

Barbalat' Lemma [8] $\phi: R \rightarrow R$ は $[0, \infty)$ で, 一様に連続な関数 (uniformly continuous function) であるとする $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ が存在し, その値が有限であると仮定する. この時,

$$\phi(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \tag{32}$$

Gerschgorin's Theorem [9] 行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が与えられた時, 複素平面 s で $2n$ 個の円盤

$$R_i \triangleq \left\{ s \in \mathbb{C}; |s - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$S_j \triangleq \left\{ s \in \mathbb{C}; |s - a_{jj}| \leq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right\}, j = 1, \dots, n \quad (33)$$

を考える. A のすべての固有値は複素平面の領域

$$T = \left(\bigcup_{i=1}^n R_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n S_j \right) \quad (34)$$

に存在する.

Gerschgorin's Theorem を図的に解釈すると, Fig. 3~6 のようになる.

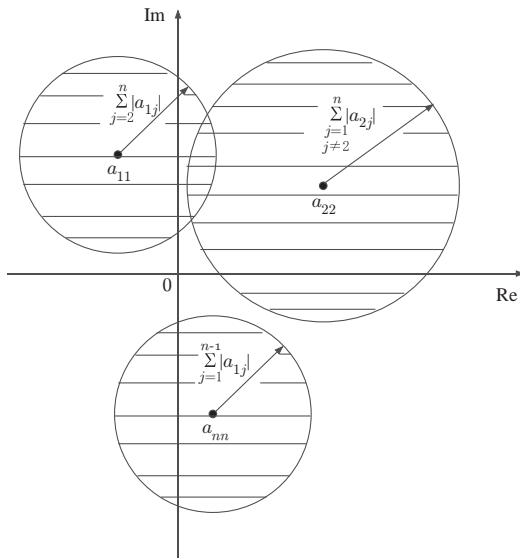


Fig.3: disc R_i

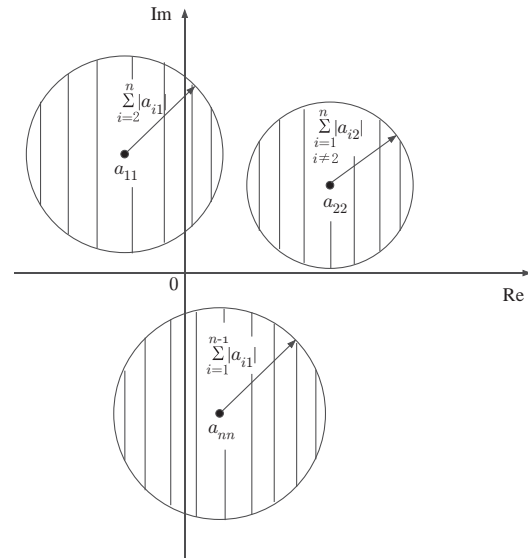


Fig.4: disc S_i

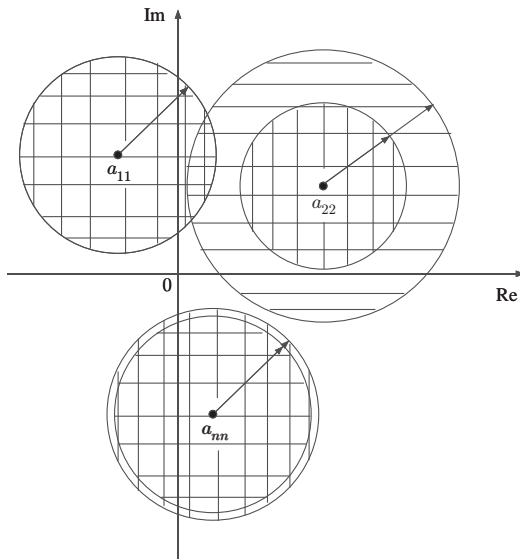


Fig.5: disc R と S

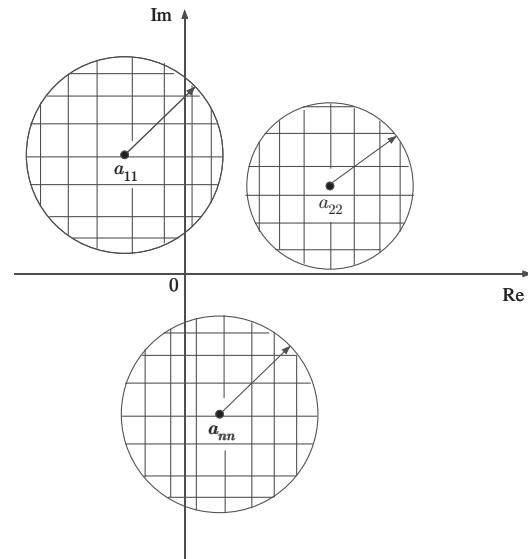


Fig.6: 領域 T

対角優勢 (Diagonal Dominant Matrix) [10] 行列 $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が対角行優勢もしくは、対角列優勢のとき、行列 Z を対角優勢という。

ちなみに、行列 $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が

$$|z_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |z_{ij}| \quad (35)$$

を満たす時、対角行優勢という。また、

$$|z_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |z_{ji}| \quad (36)$$

を満たす時、対角列優勢という。

参考文献

- [1] W. Ren, R. W. Beard and E. M. Atkins, “A Survey of Consensus Problems in Multi-agent Coordination,” *Proc. of the 2005 American Control Conference*, pp. 1859–1864, 2005.
- [2] A. Rodriguez-Angeles and H. Nijmeijer, “Cooperative Synchronization of Robots via Estimated State Feedback,” *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1514–1519, 2003.
- [3] A. Rodriguez-Angeles and H. Nijmeijer, “Mutual Synchronization of Robots via Estimated State Feedback : A Cooperative Approach,” *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 12, No. 4, pp. 542–554, 2004.
- [4] L. Feng, Y. Koren and J. Borenstein, “Cross-Coupling Motion Controller for Mobile Robots,” *IEEE Control Syst. Mag.*, Vol. 13, pp. 35–43, 1993.
- [5] B. Paden and R. Panja, “Globally Asymptotically Stable ‘PD+’ Controller for Robot Manipulators,” *Int. J. Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1697–1712, 1988.
- [6] J. J.-E. Slotine, W. Li, “On the Adaptive Control of Robot Manipulators,” *Int. J. of Robotics Res.*, Vol. 6, pp.49–59, 1987.
- [7] M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasager, *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006.
- [8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002.
- [9] 児玉, 須田, 『システム制御のためのマトリックス理論』計測自動制御学会, 1987.
- [10] 伊藤, 木村, 細江, 『線形制御系の設計理論』計測自動制御学会, 1987.