

consensus 問題の性質

Property of Consensus Problem

藤田研究室 五十嵐 裕司

平成 18 年 5 月 15 日

1 はじめに

今回は, 前回に引き続いて consensus 問題を取り扱う. 前回では consensus 問題を定式化し, consensus 問題を達成するための入力を求め, 証明の概要を説明した. 今回は, 前回 simulation を用いて示したグラフ (agent の結びつき) による収束性の違いについて紹介する.

2 consensus 問題について

この章では, 前回説明した consensus 問題について少し述べる
ダイナミクス (dynamics)

$$\dot{x}_i = u_i \quad (1)$$

を持つ複数の agent がいる状況を考える. ここで $x_i \in R$ は状態 (state) であり, $u_i \in R$ は入力 (input) である. またグラフ (graph) $G = (V, E)$ を考える. ここで $V = \{1, \dots, n\}$ は頂点集合 (vertex set) であり, $E = \{(i, j) \in V \times V\}$ は辺集合 (edge set) である. $A = (a_{ij})$ をグラフ G の隣接行列 (adjacency matrix) とする. また agent i の近傍 (neighborhood) を以下のように定義 (definition) する.

$$N_i \triangleq \{j \in V : a_{ij} \neq 0\} \quad (2)$$

今回はグラフは無向グラフ (undirected graph) で固定 (fixed), 連結 (connected) であると仮定する.

consensus 問題の制御目標は各 agent の状態 x_i を一定の値に収束 (convergence) させることである. つまり

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha \quad \forall i \\ x &= \alpha \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3)$$

である. ここで $x \triangleq \{x_1, \dots, x_n\}^T$ であり, $\mathbf{1} \triangleq \{1, \dots, 1\}^T$ である. この時 α のことを collective decision と呼ぶ. この時, 入力 u_i を

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (4)$$

とすると consensus が達成されることが知られている [1]. この入力を入れたときのダイナミクスは

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (5)$$

となる. 式 (5) はグラフラプラジアン L を用いると以下のように書き換えることができる.

$$\dot{x} = -Lx \quad (6)$$

ここでグラフラプラジアン L は式 (4) のように定義される. このことをブロック線図 (block diagram) で書くと Fig.1 のように表される.

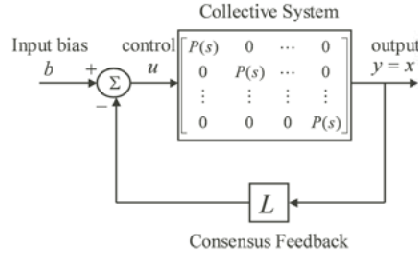


Fig. 1: block diagram of consensus problem

2.1 収束性の証明

次にダイナミクス (6) を持つシステムの状態が同じ値に収束することを示す。まずポテンシャル関数 (potential function) として以下のようなグラフラプラジアン (graph laplacian) の二次形式 (quadratic form) を考える。

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx \quad (7)$$

この関数は展開してみるとグラフラプラジアンから

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E} a_{ij}(x_j - x_i)^2 \quad (8)$$

となる。式 (8) を見てみると右辺は SOS(Sum of Square) となっていることがわかる。つまりグラフラプラジアン二次形式 $V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx$ は半正定 (semi-positive definite) であることがわかる。次にポテンシャル関数 (potential function) の微分を計算してみると

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{x}^T Lx + x^T L\dot{x}) \\ &= -x^T L^T Lx \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

である。ここで注意したいのは $\dot{V}(x)$ は負定ではなく非正定 (semi-negative definite) となることである。 $\dot{V}(x)$ が非正定となるのはグラフラプラジアンからなる性質である

$$L\mathbf{1} = 0 \quad (10)$$

よりからわかる。あとはラ・サールの不変定理 (LaSalle's invariant principle) によって consensus の達成が証明できる。

2.2 consensus の場所の求め方

次に consensus の場所について説明する。consensus の場所 (collective decision などと言う) は閉ループ系 (close system)(6) に対して不変量を見つけることによって示される。実は今回の場合は

$$y = \sum_{i=1}^n x_i = \mathbf{1}^T x \quad (11)$$

が不変量である。なぜなら式 (11) の微分を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mathbf{1}^T \dot{x} \\ &= -\mathbf{1}^T Lx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となることよりわかる. ここで無向グラフのグラフラプラジアン⁽⁶⁾の性質 (6) を使った. もし, consensus が達成されたならば $x = \alpha \mathbf{1}$ となるので式 (11) が不変量となることより

$$y = \mathbf{1}^T x(0) = \mathbf{1}^T \alpha = n\alpha \quad (13)$$

となることがわかる. ここで n は全ての agent の数であり, $x(0)$ は agent の初期状態 (initial state) である. 式 (13) を α について解くと

$$\alpha = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0) \quad (14)$$

となり, 各 agent の初期状態の平均値が consensus の場所であることがわかる. このように各 agent の初期状態の平均値が consensus の場所であることを average consensus と呼ぶ [1].

3 consensus 問題の収束性についての準備

この章では, 文献 [1] に紹介されている収束性について説明する. ただし, 文献 [1] では無向グラフ (undirected graph) の場合ではなく, 平衡グラフ (balanced graph) という無向グラフより少し拡張されたグラフについて説明されている. ここでは無向グラフの場合に限定して述べるので, 文献 [1] の記述と少し異なることに注意されたい.

consensus 問題の収束性を述べる時には, グラフラプラジアン (graph laplacian) の固有値 (eigenvalue) が重要となってくる. 一般的にエルミート行列 (Hermitian matrix)(または実対象行列 (symmetric matrix)) の固有値 (eigenvalue) に対し以下の定理が知られている. 以下の定理はクーラン・フィッシャーの (ミニマックス) の定理 (Courant-Fischer theorem) と呼ばれている [3],[2].

定理 3.1 クーラン・フィッシャーの (ミニマックス) 定理 (Courant-Fischer theorem)

エルミート行列 $A \in C^{n \times n}$ (または実対称行列 $A \in R^{n \times n}$) の固有値を大きい順に $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$ と並べる. ただし, 重複固有値も重複回数だけ数え上げる. このとき

$$\lambda_k = \min_{\dim S \leq k-1} \max_{x \in S^\perp} x^H A x \quad (15)$$

である. ただし, $S \subset C^n$ (または $S \subset R^n$) は部分空間である.

この定理において x^H は共役転置 (Hermitian adjoint) であり, もし x が実数ベクトルならば x^H は x^T と同じことである. 今回は実数ベクトルしか扱わないので x^H を x^T と見て問題はない. ただし, この定理をそのまま使うのは少し難しいのでこの定理の特別な場合として以下の式を使う.

$$\lambda_2 = \min_{x \perp u_1, \|x\|=1} x^T A x \quad (16)$$

ここでは λ_2 は 2 番目に小さい固有値 (second minimum eigenvalue), u_n は 1 番小さい固有値 (minimum eigenvalue) に対する固有ベクトル (eigenvector) である. クーラン・フィッシャーの定理のところと固有値のインデックスの配置が異なることに注意されたい.

4 consensus 問題の収束性

この章では consensus 問題の収束性について述べる. まず, consensus 問題では各 agent の Dynamics は全ての agent をまとめて書くと以下のように表される.

$$\dot{x} = u \quad (17)$$

今回は, average consensus を考える. よって入力

$$u = -Lx \quad (18)$$

で与えられ, この時, 閉ループ系 (*closed system*) は

$$\dot{x} = -Lx \quad (19)$$

で与えられる. しかし, 式 (19) の形式だと収束性の解析がしづらいので, 今, 以下のような誤差関数 (*error function*) を考える.

$$\delta = x - \alpha \mathbf{1} \quad (20)$$

ここで α は式 (14) で与えられているように各 *agent* の初期状態の平均値 (*average*) である. 文献 [1] では δ のことを *disagreement vector* と呼んでいる. 次に *disagreement vector* の微分を考えると,

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \dot{x} - \dot{\alpha} \mathbf{1} \\ &= \dot{x} \end{aligned} \quad (21)$$

となる. また

$$L\alpha \mathbf{1} = \alpha L \mathbf{1} = 0 \quad (22)$$

より

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Lx \\ \dot{x} - \dot{\alpha} \mathbf{1} &= -Lx + L\alpha \mathbf{1} \quad (\dot{\alpha} \mathbf{1} = 0) \\ \dot{\delta} &= -L\delta \end{aligned} \quad (23)$$

が成り立つ. また δ に関しては以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T \delta &= \mathbf{1}^T x - \alpha \mathbf{1}^T \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}^T x - \mathbf{1}^T x(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ここで式 (11), (12) で示した, 各 *agent* の状態の総和は不変量であることを使った.

次に以下のようなリヤプノフ関数 (*lyapunov function*) を考える.

$$V(\delta) = \delta^T \delta \quad (25)$$

この関数を微分すると

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta) &= \delta^T \dot{\delta} \\ &= -2\delta^T L\delta \end{aligned} \quad (26)$$

となる. ここで式 (16) を使うと

$$\begin{aligned} \lambda_2(L) &= \min_{\delta \perp \mathbf{u}_1, \|\delta\|=1} \delta^T L\delta \\ &= \min_{\delta \perp \mathbf{u}_1} \frac{\delta^T \delta}{\delta^T \delta} \end{aligned} \quad (27)$$

となる. ここでグラフラプラジアン (*graph laplacian*) の最小固有値 (*minimum eigenvalue*) は 0 でその固有ベクトル (*eigenvector*) は

$$L \mathbf{1} = 0 \quad (28)$$

より,1である. よって

$$\delta \perp u_1 \Leftrightarrow \mathbf{1}^T \delta = 0 \quad (29)$$

である. これを式 (28) に代入すると

$$\lambda_2(L) = \min_{\delta \perp u_1} \frac{\delta^T L \delta}{\delta^T \delta} = \min_{\mathbf{1}^T \delta} \frac{\delta^T L \delta}{\delta^T \delta} \quad (30)$$

となる. 式 (24) より, $\mathbf{1}^T \delta$ は全ての時間で成り立つので

$$\begin{aligned} \lambda_2(L) &\leq \frac{\delta^T L \delta}{\delta^T \delta} \\ \lambda_2(L) \delta^T L \delta &\leq \delta^T L \delta \end{aligned} \quad (31)$$

が全ての時間で成り立つ. これを式 (26) に適用すると

$$\dot{V}(\delta) = -2\delta^T L \delta \leq -2\lambda_2(L) \delta^T \delta = -2\lambda_2(L) V \quad (32)$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta) &\leq -2\lambda_2(L) V \\ \Rightarrow V = \delta^T \delta &= \|\delta\|_2^2 \leq \|\delta(0)\|_2^2 e^{-2\lambda_2(L)t} \\ \Rightarrow \|\delta\|_2 &\leq \|\delta(0)\|_2 e^{-\lambda_2(L)t} \end{aligned} \quad (33)$$

となる. これより, ラプラジアン の 2 番目に小さい固有値が *consensus* 問題の収束性に大きく影響することがわかる.

5 シミュレーション (simulation)

いままで説明してきた *consensus* 問題のシミュレーション (*simulation*) を *Simulink* で行った.

5.1 問題設定

シミュレーション (*simulation*) の問題設定は前回のゼミと同じである. いま以下のようなダイナミクス (*Dynamics*) を持つ 5 台の *agent* がいる状況を考える.

$$\dot{x}_i = u_i \quad (34)$$

また, 今回はグラフ (*Graph*) が 3 種類の場合についてシミュレーション (*simulation*) を行った. グラフの形を Fig.2 に示す.

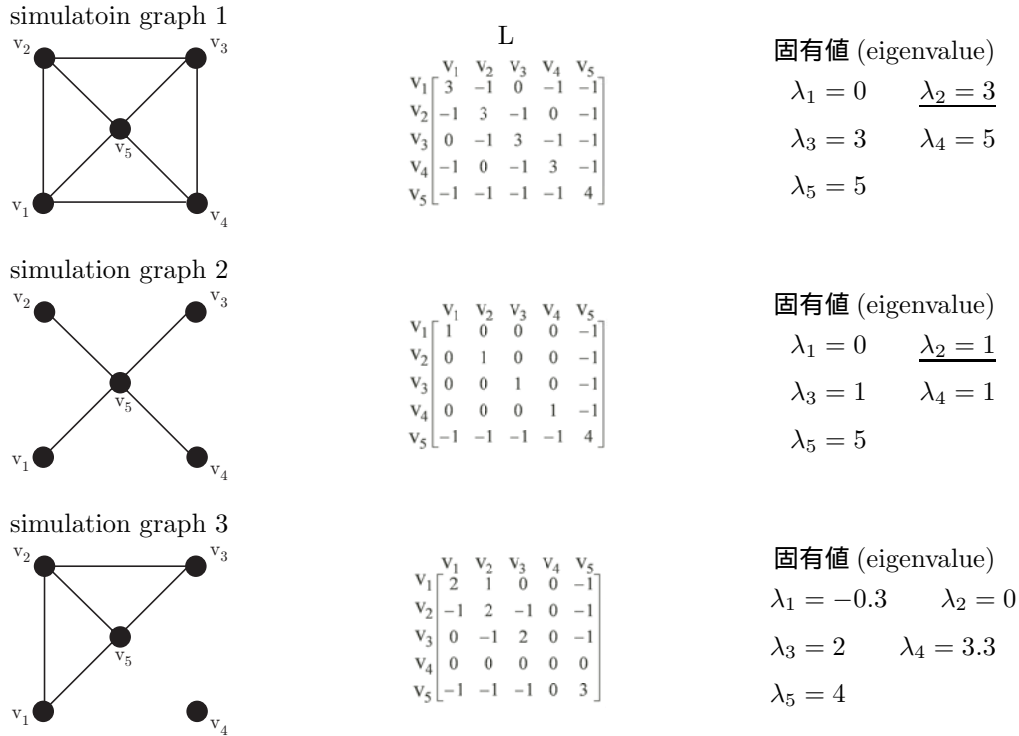


Fig. 2: simulation graph

グラフ 1 と 2 の違いは連結の強さであり、グラフ 2 の方が *agent* の連結が弱い。またグラフ 3 は右下にどのグラフともつながっていない孤立点が存在しているのでグラフ 3 は連結ではない。

また、各 *agent* の初期状態 (*initial state*) を以下のように設定した

$$x_1(0) = 15.5 \quad x_2(0) = 5.25 \quad x_3(0) = -20 \quad x_4(0) = -15 \quad x_5(0) = 8.25 \quad (35)$$

各 *agent* の初期状態の平均値 $Ave(x(0))$ を計算してみると

$$\begin{aligned} Ave(x(0)) &= \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0) + x_5(0)}{5} \\ &= \frac{15.5 + 5.25 - 20 + -15 + 8.25}{5} \\ &= -1.2 \end{aligned} \quad (36)$$

となる。つまり、*average consensus* では全ての状態が -1.2 に収束することが予想される。Fig.3 に *Simulink* のブロック線図 (*block diagram*), 4 にシミュレーションの結果 (*result*) を示す。左側は各 *agent* の状態を示したグラフであり、右側は *disagreement vector* の *2-norm* と式 (33) の *upper bound* との比較図である。

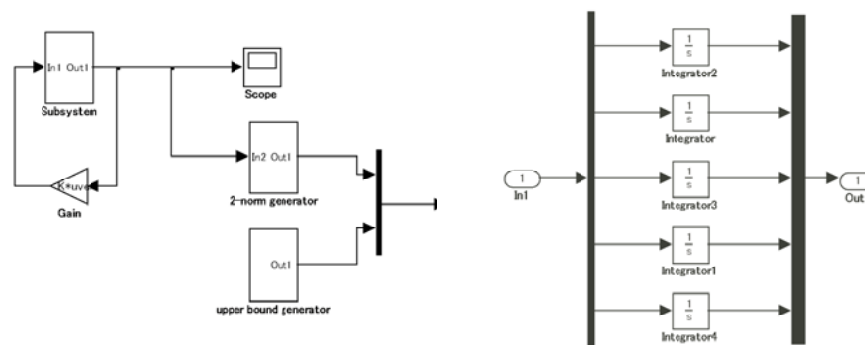


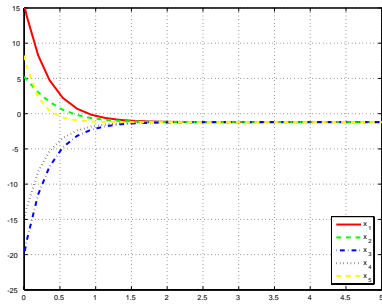
Fig. 3: simulation model

シミュレーションの結果をしてみると、グラフ 2 の場合よりもグラフ 1 の場合の方が収束が早いことがわかる。これよりグラフラプラジアン の 2 番目に小さい固有値が大きい方が収束が速いことがわかる。また、*disagreement vector* の 2-norm は指数関数的に減少していることがわかる。グラフ 3 の場合をしてみると全ての *agent* が一定の値には収束していないことがわかる。これよりグラフが連結でなければ全ての *agent* の状態が一定値には収束しないことがわかる。

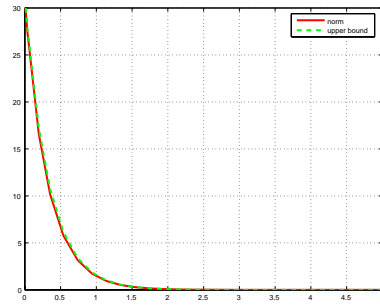
参考文献

- [1] Reza Olfati-Saber, J. Alex Fax and Richard M. Murray, "Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems," *Proceeding of IEEE*, 2006 (Invited Paper, under review)
- [2] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1987
- [3] 太田快人 『システム制御のための数学 (1) -線形代数編-』 コロナ社 2000

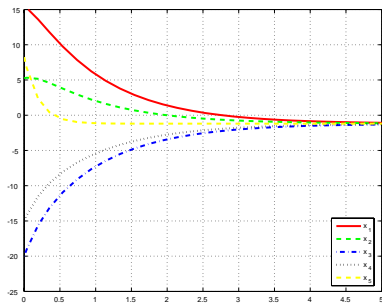
average consensus(simulation graph 1)



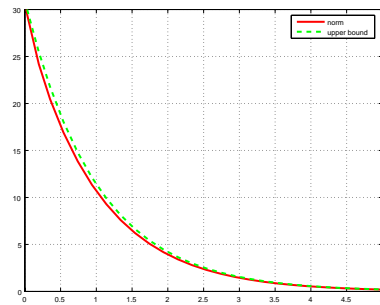
2-norm and upper bound(simulation graph 1)



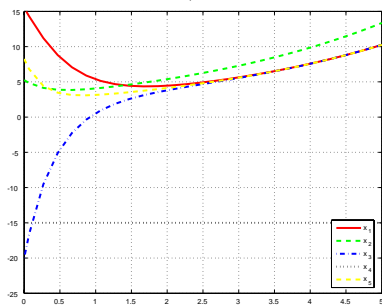
average consensus(simulation graph 2)



2-norm and upper bound(simulation graph 3)



average consensus(simulation graph 3)



2-norm and upper bound(simulation graph 3)

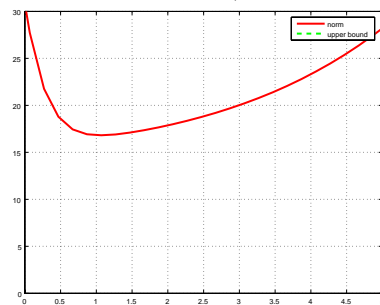


Fig. 4: simulatoin result