

複数台の agent による視覚情報を用いた分散制御問題

藤田研究室 山田 照樹

平成 18 年 5 月 15 日

1 はじめに

近年、センサを備えた複数台のロボットが情報を共有することにより、協調してある制御目標を達成するセンサネットワーク型システムの制御問題が注目を集めている。本レポートでは、五十嵐君のゼミ発表資料 [1] でまとめられたグラフ理論と consensus 問題をふまえて、文献 [2][3] で Ali Jadbabaie らが提起している、複数台の agent による flocking 問題についてまとめる。まずはじめに、グラフ G が固定で連結であるという条件の下、平面上を同じ速さで動く複数台の agent 同士が十分時間が経過すると flocking を達成するための分散制御則について紹介し、その証明をおこなう。つぎに、これを拡張し、3 次元空間を移動する agent が flocking を達成するための分散制御則の導出をおこない、その証明もおこなう。

2 分散協調問題と flocking

この節では、2 次元平面上を常に同じ速さで移動する複数台の agent が flocking を達成するための分散制御則を導出する。ここで、flocking とは、十分時間が経過すると、すべての agent が同じ速度で動き、agent 間の距離が一定となることである。すなわち、お互いに隊列を成して平行に移動する。これについては、あとで改めて定義をおこなう。また、この問題は、agent を頂点 (node)、相対的な位置関係を辺 (edge) と見れば、グラフ理論によって考えることができる。

2.1 システムモデルの記述

まずはじめに、視覚センサ (カメラなど) を備えた agent のシステムモデルを幾何学的に記述する。ある平面上に N 台の agent の集合を考える。agent i の近傍の agent 集合を \mathcal{N}_i と書くと

$$\mathcal{N}_i := \{j | i \sim j\} \subseteq \{1, \dots, N\} \setminus \{i\} \quad (2.1)$$

と記述される。ここで、 $i \sim j$ は agent i と agent j がグラフで繋がれていることを示す。これを工学的に述べると、 \mathcal{N}_i は、agent i が視覚情報を獲得できる agent の集合であるということもできる。agent i は、絶対座標系で (x_i, y_i) という位置座標をもつとき、速度ベクトル v_i は $v_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T$ とする。また、agent i の進行方向は、 θ_i と表わされ、

$$\theta_i = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_i}{\dot{x}_i} \right)$$

により求まる。また、すべての agent が速さ v で動くとする。すなわち

$$|v_i| = v \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.2)$$

を仮定する。よって、agent i の運動モデルは、

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v \cos \theta_i \\ \dot{y}_i &= v \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表わせる。ここでの制御目標は、複数の agent が flocking を達成するための制御入力 ω_i (角速度入力) を求めることである。さらに、文献 [2][3] では、各 agent は近傍にある agent から視覚情報としてつぎの 3 つの情報が得られると仮定している。

- β_{ij} : agent i の座標系からみた agent i と agent j の相対的な方位角
- $\dot{\beta}_{ij}$: optical flow と呼ばれている相対的な方位角の時間変化率
- τ_{ij} : agent i と agent j の衝突までの時間

ここで, agent j は agent i の近傍の集合 \mathcal{N}_i に含まれるとする.

Fig. 1 にこの問題の状況設定を示す.

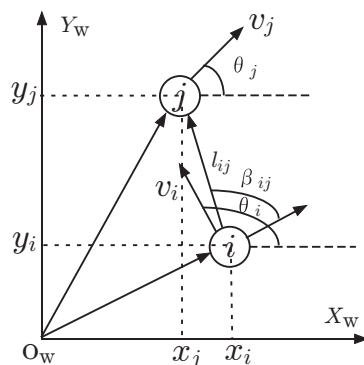


Fig. 1: Configuration of 2 agents.

agent i からみた agent j の相対的な距離 l_{ij} と相対的な方位角 β_{ij} は, 図からそれぞれ

$$l_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (2.4)$$

$$\beta_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \right) - \theta_i + \frac{\pi}{2} \quad (2.5)$$

のように求められる.

また, 衝突までの時間 τ_{ij} は, agent 間の距離を近づぐ速度で割れば求まるので

$$\tau_{ij} = \frac{l_{ij}}{\dot{l}_{ij}} \quad (2.6)$$

となる.

2.2 flocking 達成のための分散制御則の導出

制御目標である flocking について定義をおこなう.

定義 2.1 flocking: 全ての agent が同じ速度ベクトルを持ち, agent 同士の距離が安定となり, お互いが隊列を成して平行に移動している状態のこと.

この定義に基づき, flocking を定量的に表わすと

$$v_i = \bar{v} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.7)$$

$$\dot{l}_{ij} = 0 \quad (2.8)$$

となる. ここで, \bar{v} は flocking が達成されたときの全ての agent がもつ速度ベクトルとする.

しかし, いまの問題設定では, 全ての agent は常に同じ速さ v で動くものと仮定しているので, (2.7) の flocking のための条件式は

$$\theta_i = \bar{\theta} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.9)$$

のように書き換えられる。以上から、いまの問題設定における flocking のための条件式は

$$\theta_i = \bar{\theta} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.10)$$

$$\dot{l}_{ij} = 0 \quad (2.11)$$

となる。ここで、 $\bar{\theta}$ は flocking が達成されたときの全ての agent の速度ベクトルの方向とする。

つぎに、flocking が達成されるための分散制御則を導出する。flocking が達成される時、ある agent からみた近傍の agent との相対的な方位角が時間によらずに一定となるので、optical flow の全ての近傍の合計が 0 となる。これを数式で表わすと

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\beta}_{ij} = 0 \quad (2.12)$$

となる。しかし、(2.12) 式は flocking 達成のための必要条件である。たとえば、Fig. 2 のような agent 間の状態だと、flocking が達成していないケースでも (2.12) 式は成り立ってしまう。

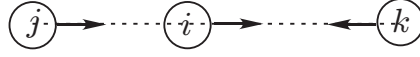


Fig. 2: The case of not flocking in spite of (2.12).

そこで、前節の式 (2.6) で表わされる agent 間の衝突までの時間 τ_{ij} という情報が有効になる。この時間が無限大になれば(または $\dot{l}_{ij} = 0$ となれば)、衝突は回避できる。そこで、衝突までの時間 τ_{ij} を考えるのに、(2.4) の時間微分を行う。

$$\begin{aligned} 2l_{ij}\dot{l}_{ij} &= 2(x_j - x_i)(\dot{x}_j - \dot{x}_i) + 2(y_j - y_i)(\dot{y}_j - \dot{y}_i) \\ &= 2v(x_j - x_i)(\cos \theta_j - \cos \theta_i) + 2v(y_j - y_i)(\sin \theta_j - \sin \theta_i) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \cos \theta_j - \cos \theta_i &= -2 \sin \left(\frac{\theta_j + \theta_i}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \\ \sin \theta_j - \sin \theta_i &= 2 \cos \left(\frac{\theta_j + \theta_i}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

を (2.13) に代入すると、

$$\begin{aligned} 2l_{ij}\dot{l}_{ij} &= 2v \sin \left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \left\{ -(x_j - x_i) \sin \left(\frac{\theta_j + \theta_i}{2} \right) + (y_j - y_i) \cos \left(\frac{\theta_j + \theta_i}{2} \right) \right\} \\ &= 2vl_{ij} \sin \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_j + \theta_i}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \right) \right) \\ &= 2vl_{ij} \sin \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \cos \left(\beta_{ij} + \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

以上から、衝突時間 τ_{ij} の逆数は、(2.6), (2.15) により

$$\frac{1}{\tau_{ij}} = \frac{\dot{l}_{ij}}{l_{ij}} = \frac{2v}{l_{ij}} \sin \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \cos \left(\beta_{ij} + \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \quad (2.16)$$

と求まる。

また、(2.5) 式を時間微分すると

$$\dot{\beta}_{ij} + \omega_i = -\frac{2v}{l_{ij}} \sin \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \sin \left(\beta_{ij} + \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \quad (2.17)$$

という関係式が得られる.

(2.16), (2.17) より

$$\frac{1}{\tau_{ij}} \cos \beta_{ij} - (\omega_i + \dot{\beta}_{ij}) \sin \beta_{ij} = \frac{v}{l_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.18)$$

という関係式が得られる. この関係式は, すべての agent i とその近傍の agent j ($j \in \mathcal{N}_i$) について成り立つので, すべての和をとって

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{\tau_{ij}} \cos \beta_{ij} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\omega_i + \dot{\beta}_{ij}) \sin \beta_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{v}{l_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.19)$$

がいえ.

ここで, Ali Jadbabaie らは, 次の形の分散制御則を提案している.

$$\omega_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{v}{l_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.20)$$

さらに, (2.20) を (2.17) へ代入すると, agent i の制御則は

$$\omega_i = \frac{1}{1 - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sin \beta_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\dot{\beta}_{ij} \sin \beta_{ij} - \frac{1}{\tau_{ij} \cos \beta_{ij}} \right) \quad (2.21)$$

と求まり, agent i が近傍の agent j から得ることのできる視覚情報 $\beta_{ij}, \dot{\beta}_{ij}, \tau_{ij}$ ($j \in \mathcal{N}_i$) によって表わせる.

2.3 分散制御則による flocking の証明

ここでは, グラフ構造が不変であるときに, 前節で提案された制御則 (2.20) によって agent 同士の flocking が達成されることを示す.

まず最初に, グラフ理論で用いられる記号について述べておく.

グラフ $G = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, W\}$ は, 辺に重みがつけられたグラフであり, つぎから成る.

- \mathcal{V} は頂点の集合を表わし, ここでは agent の集合である.
- \mathcal{E} は辺の集合を表わし, $\mathcal{E} = \{e_{ij} = (\nu_i, \nu_j) | \nu_i, \nu_j \in \mathcal{V}, j \in \mathcal{N}_i\}$ と書ける. これは, agent 同士のつながりを表わす.
- w_{ij} は, 各辺 e_{ij} に対する正の値の重みである.

ここでは, 辺に任意の向きをもつ有向グラフ G を考える. また, 有向グラフは連結 (connected) であると仮定する. 有向グラフが連結とは, 辺の向きを考えなければ, ある頂点からその他のどんな頂点へも到達できるような経路が存在する場合をいう. すなわち, どの頂点にもつながっていない孤立した頂点が存在しないことを意味する. G は, 頂点と辺で構成される接続行列 B をもつ. 接続行列 B を用いて (2.20) は

$$\dot{\theta} = \omega = -BW \sin(B^T \theta) \quad (2.22)$$

と書き換えることができる. ここで, θ は, 各 agent の座標系における進行方向の角度であり, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_N]^T$ と表わされ, W は各辺の重みを対角成分に並べた対角行列である. さらに (2.22) 式は

$$\dot{\theta} = \omega = -BWB^T \theta \quad (2.23)$$

のように, より簡単な形で書き表せる. ここで, W は

$$W = \text{diag} \left\{ \frac{v}{l_{ij}} \text{sinc}(\theta_i - \theta_j) | (i, j) \in \mathcal{E} \right\} \quad (2.24)$$

と定める. また, v, l_{ij} は正の値であり, $\text{sinc}(\Delta\theta) = \frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta}$ は, 各 agent の進行方向ベクトル θ_i を $(-\pi/2, \pi/2)$ に限定すれば正定な関数である. よって, (2.24) 式で表わされる W は正定な重み関数となる. つぎに, リアプノフ関数 (Lyapunov function) として

$$U = \frac{1}{2}\theta^T\theta \quad (2.25)$$

を考える. このとき, (2.22) 式より

$$\dot{U} = \theta^T\dot{\theta} = -\theta^TBWB^T\theta = -\theta^TL_w\theta \leq 0 \quad (2.26)$$

が成り立つ. ここで, $L_w = BWB^T$ は, グラフ G のラプラジアン (Laplacian of graph G) とする. U は, 正定であり時間に関して非増加関数であるので

$$\Sigma_c = \{\theta_i, i = 1, \dots, N | U \leq c\} \quad (2.27)$$

は, c を各 agent が $(-\pi/2, \pi/2)$ の範囲で動くときの最大値と考えると, 正の不変集合 (positively invariant set) となる. また, θ は有界で連続であり, Σ_c はコンパクトな集合 (compact set) である. したがって, ラ・サールの不変定理 (LaSalle's invariance principle) を使うと, 初期状態 θ_0 が Σ_c の内部にあるとき, つぎの不変集合 E に含まれる最大の不变集合 S_θ に収束する.

$$E = \{\theta_i, i = 1, \dots, N | \dot{U} = 0\} \quad (2.28)$$

ここで, E に含まれる最大の不变集合 S_θ は (2.26) より $L_w\theta = 0$ の状態集合である. 有向グラフ G が連結であるなら, グラフラプラジアン L_w について

$$L_w\mathbf{1} = 0 \quad (2.29)$$

が成り立つ. ただし, $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$ とする. また, Σ_c の内部の L_w のカーネル $\text{Ker}\{L_w\}$ は, (2.29) 式より $\theta \in \text{span}\mathbf{1}$ である. よって, E に含まれる最大の不变集合 S_θ は

$$S_\theta = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) | \theta_1 = \dots = \theta_N = \bar{\theta}\} \quad (2.30)$$

と求まり, (2.23) 式の制御則により, すべての agent は $t \rightarrow \infty$ で進行方向が揃う. ただし, 実際には, 制御則は, $\beta_{ij}, \dot{\beta}_{ij}, \tau_{ij}$ という近傍の agent から獲得できる情報のみを用いた (2.21) 式によって計算される. また, (2.16) 式より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{l}_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2v \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \cos\left(\beta_{ij} + \frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \quad (2.31)$$

となり, $\lim_{\theta_i, \theta_j \rightarrow \bar{\theta}} \dot{l}_{ij} = 0$ が得られる. よって, flocking のための条件式 (2.10), (2.11) が満たされ, 制御則 (2.23) により flocking が達成される. 以上から, グラフ G が固定で, 連結であるとき, (2.21) により求まる制御則によって flocking が達成される.

3 シミュレーション

この節では, 分散制御則 (2.20) により, flocking が達成されることをシミュレーションにより確認する. シミュレーションでは, 3 台の agent がグラフでつながっていると仮定し, 初期位置, 初期速度を Fig. 3 のように設定する. ここで, すべての agent の速さは $v = 1$ を仮定している.

Fig.4, Fig.5 に各 agent の状態量の時間変化, 平面上の軌道を示す.

Fig.4, Fig.5 は, 3 台の agent 間で flocking が達成されることを示している. また, 初期状態で近い位置関係にあった agent j と agent k は, agent i に比べて状態量 θ の収束が速いことがわかる.

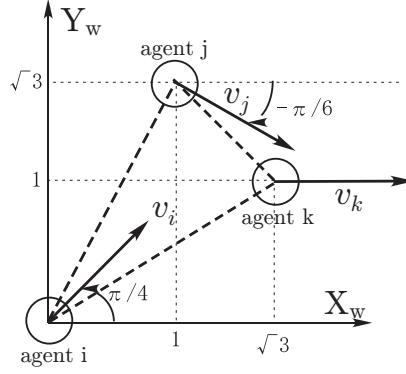


Fig. 3: Initial conditions of three agents from a connected graph.

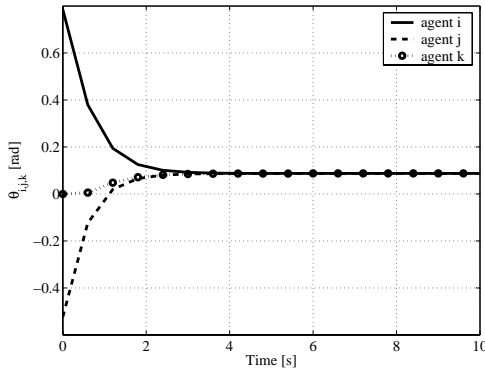


Fig. 4: Time- θ graph.

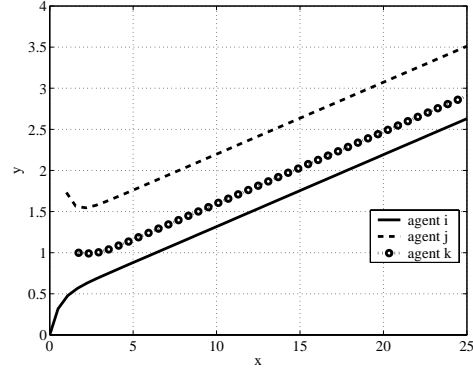


Fig. 5: The trajectory of three agents.

4 3次元空間を動く agent の flocking 問題

4.1 モデルの導出

この節では、3次元空間内を移動する N 台の agent による flocking 問題について考える。3次元空間内で、agent i の座標を $(x_i, y_i, z_i)^T$ のように定める。このとき、agent i の速度ベクトル v_i は $v_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T$ と書ける。また、各 agent の速さを $|v_i| = 1 \ \forall i = 1, \dots, N$ と仮定する。Fig. 6 のように、agent i の方位 (heading) θ_i と姿勢 (attitude) ϕ_i は

$$\begin{aligned} \theta_i &\triangleq \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_i}{\dot{x}_i} \right), \quad 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \\ \phi_i &\triangleq \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2}}{\dot{z}_i} \right), \quad 0 < \phi_i < \pi \end{aligned} \quad (4.1)$$

のように表わせる。したがって、速度ベクトル v_i は

$$v_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \sin \phi_i \\ \sin \theta_i \sin \phi_i \\ \cos \phi_i \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

と表わせる。

Fig.6 のように、 v_i, v_j は半径 1 の球面上を動く。 v_i の時間微分を行うと agent i の dynamics は

$$\dot{v}_i = U_{i\theta} X_{i\theta} + U_{i\phi} X_{i\phi} \quad (4.3)$$

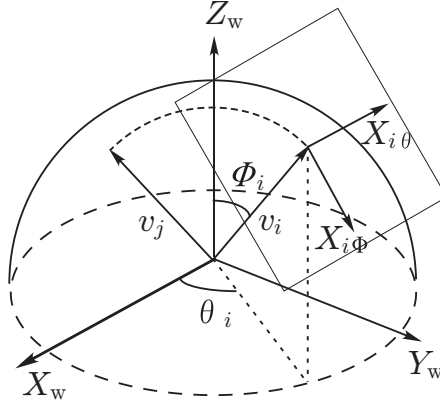


Fig. 6: The sphere and its tangent plane.

ここで, $X_{i\theta}$, $X_{i\phi}$ は

$$X_{i\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{i\phi} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \cos \phi_i \\ \sin \theta_i \cos \phi_i \\ -\sin \phi_i \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

であり, Fig. 6 のように, それぞれが v_i ベクトルに直交し, ノルムが 1 のベクトルである. したがって, $X_{i\theta}$, $X_{i\phi}$ は, 球の接平面における正規基底ベクトルと捉えることができる. また $U_{i\theta}$, $U_{i\phi}$ は agent i に対する入力で

$$U_{i\theta} = \dot{\theta} \sin \phi_i, \quad U_{i\phi} = \dot{\phi}_i \quad (4.5)$$

と書ける.

4.2 flocking 達成のための制御則

ここでの制御目標は, flocking を達成することである. 速さは全ての agent について 1 と仮定しているので, 制御目標である flocking を定量的に表わすと

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_j \quad \forall i, j \\ \phi_i &= \phi_j \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる. このとき, (4.2) より全ての agent の速度ベクトルが等しくなるので, flocking が達成される. また, agent i の dynamics は前節で

$$\dot{v}_i = U_{i\theta} X_{i\theta} + U_{i\phi} X_{i\phi} \quad (4.7)$$

と表わしていた. 文献 [3] によると, グラフ構造が固定で連結であるとき, 制御入力を

$$U_{i\theta} = \sum_{j \in N_i} \langle v_j, X_{i\theta} \rangle \quad (4.8)$$

$$U_{i\phi} = \sum_{j \in N_i} \langle v_j, X_{i\phi} \rangle \quad (4.9)$$

のように計算すると, 閉ループ系が局所的に平衡点へ漸近安定となると書かれている. 実際に (4.8), (4.9) を計算してみると

$$\begin{aligned}
U_{i\theta} &= \sum_{j \in N_i} \langle v_j, X_{i\theta} \rangle \\
&= \sum_{j \in N_i} (\cos \theta_j \sin \phi_j \quad \sin \theta_j \sin \phi_j \quad \cos \phi_j) \begin{pmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j \in N_i} -\cos \theta_j \sin \phi_j \sin \theta_i + \sin \theta_j \sin \phi_j \cos \theta_i \\
&= \sum_{j \in N_i} \sin \phi_j (-\cos \theta_j \sin \theta_i + \sin \theta_j \cos \theta_i) \\
&= \sum_{j \in N_i} \sin \theta_j \sin(\theta_j - \theta_i) \\
&= -\sum_{j \in N_i} \sin \theta_j \sin(\theta_i - \theta_j)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
U_{i\phi} &= \sum_{j \in N_i} \langle v_j, X_{i\phi} \rangle \\
&= \sum_{j \in N_i} (\cos \theta_j \sin \phi_j \quad \sin \theta_j \sin \phi_j \quad \cos \phi_j) \begin{pmatrix} \cos \theta_i \cos \phi_i \\ \sin \theta_i \cos \phi_i \\ -\sin \phi_i \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j \in N_i} (\cos \theta_j \sin \phi_j \cos \theta_i \cos \phi_i + \sin \theta_j \sin \phi_j \sin \theta_i \cos \phi_i - \cos \phi_j \sin \phi_i) \\
&= \sum_{j \in N_i} (\sin \phi_j \cos \phi_i (\cos \theta_j \cos \theta_i + \sin \theta_j \sin \theta_i) - \cos \phi_j \sin \phi_i) \\
&= \sum_{j \in N_i} (\sin \phi_j \cos \phi_i \cos(\theta_j - \theta_i) - \cos \phi_j \sin \phi_i)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.5) と (4.10), (4.11) より, 状態量である θ_i, ϕ_i に関して

$$\dot{\theta}_i = -\sum_{j \in N_i} \frac{\sin \phi_j}{\sin \phi_i} \sin(\theta_i - \theta_j) \tag{4.12}$$

$$\dot{\phi}_i = -\sum_{j \in N_i} (\sin \phi_i \cos \phi_j - \sin \phi_j \cos \phi_i \cos(\theta_i - \theta_j)) \tag{4.13}$$

が成り立つ.

4.3 flocking の証明

つぎに, (4.12), (4.13) の制御則により, flocking が達成されることを証明する. まずは式 (4.12) について, 式の変形を行う. (4.12) を書き換えると

$$\dot{\theta} = -B \sin(B^T \theta) = -BW(\theta)B^T \theta \tag{4.14}$$

となる. ここで B はグラフ G の接続行列, $W(\theta)$ は以下のように定義される.

$$\begin{aligned}
W(\theta) &\triangleq \text{diag}\left\{ \frac{\sin \phi_j}{\sin \phi_i} \text{sinc}(\theta_i - \theta_j) \mid (i, j) \in E \right\} \\
\text{sinc}(\theta_i - \theta_j) &\triangleq \frac{\sin(\theta_i - \theta_j)}{\theta_i - \theta_j}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

もし、 $\theta_i, \theta_j \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ならば式 (4.15) で定義した関数 $\text{sinc}(\theta_i - \theta_j)$ は非負となる。また角度の定義 (4.1) より $0 < \phi_i < \pi$ が成り立つので $\sin \phi_i > 0$ が成り立つ。それゆえ

$$\frac{\sin \phi_j}{\sin \phi_i} \text{sinc}(\theta_i - \theta_j) \geq 0 \quad (4.16)$$

が成り立ち

$$W(\theta) \triangleq \text{diag}\left\{\frac{\sin \phi_j}{\sin \phi_i} \text{sinc}(\theta_i - \theta_j) \mid (i, j) \in E\right\} \geq 0 \quad (4.17)$$

が成り立つ。

次に式 (4.13) について、式の変形を行う。 $\cos(\theta_i - \theta_j) \in [-1, 1]$ となるので、もし $\phi_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ ならば

$$\cos(\theta_i - \theta_j) \sin \phi_j \cos \phi_i \leq \sin \phi_j \cos \phi_i \quad (4.18)$$

が成り立つ。これを式 (4.13) に代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= - \sum_{j \in N_i} (\sin \phi_i \cos \phi_j - \sin \phi_j \cos \phi_i \cos(\theta_i - \theta_j)) \\ &\leq - \sum_{j \in N_i} (\sin \phi_i \cos \phi_j - \sin \phi_j \cos \phi_i) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= - \sum_{j \in N_i} \sin(\phi_i - \phi_j) \quad (4.20)$$

となる。ここで $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}^T$ を考えると

$$\dot{\phi} \leq -B \sin(B^T \phi) = -BW(\phi)B^T \phi \quad (4.21)$$

となる。ここで B はグラフ G の接続行列であり、 $W(\phi)$ は

$$W(\phi) \triangleq \text{diag}\left\{\frac{\sin(\phi_i - \phi_j)}{\phi_i - \phi_j}\right\} = \text{diag}\{\text{sinc}(\phi_i - \phi_j)\} \quad (4.22)$$

と定義される。今は $\phi_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ と制限しているので $\text{sinc}(\phi_i - \phi_j)$ は正であり、 $W(\phi) \geq 0$ であることがわかる。つぎに、リアプノフ関数として以下のような関数を考える。

$$V \triangleq \frac{1}{2} \theta^T \theta + \frac{1}{2} \phi^T \phi \quad (4.23)$$

次に式 (4.23) の微分を計算すると

$$\dot{V} = \theta^T \dot{\theta} + \phi^T \dot{\phi} \quad (4.24)$$

となる。式 (4.24) に式 (4.14), (4.21) を適用すると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \theta^T \dot{\theta} + \phi^T \dot{\phi} \\ &\leq -\theta^T BW(\theta)B^T \theta - \phi^T BW(\phi)B^T \phi \\ &= -\theta^T L_\theta \theta - \phi^T L_\phi \phi \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

となることがわかる。ここで $L_\theta \triangleq BW(\theta)B^T$, $L_\phi \triangleq BW(\phi)B^T$ である。リアプノフ関数の微分が負定とはならず、非正定となるのでラ・サールの不変定理を使う。

まず、コンパクトな集合 Ω を以下のように定義する。

$$\Omega_c = \{(\theta, \phi) \mid V \leq c\} \quad (4.26)$$

ここで c は

$$\Omega_c \subset \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^N \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^N \quad (4.27)$$

が成り立つ範囲で最大の式 (4.23) の値とする. こうすることで Ω_c は positive invariant set となる. 式 (4.15), 式 (4.22) より $\Omega_c \subset \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^N \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^n$ でなければ必ずしもリアプノフ関数の微分が非正定とは限らない.

次に以下のように集合 E を定義する.

$$E \triangleq \{(\theta, \phi) \mid \dot{V}(x) = 0\} \quad (4.28)$$

ラ・サールの不変定理より, Ω_c 内から始まる任意のトラジェクトリーは E に収束することになる. 式 (4.25) より $\dot{V} = 0$ となるのは

$$L_\theta \theta = 0 \quad L_\phi \phi = 0 \quad (4.29)$$

が成り立つときのみである. つまり

$$\begin{aligned} \theta &\in \text{Ker}\{L_\theta\} \\ \phi &\in \text{Ker}\{L_\phi\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

に収束することになる. ここで $\text{Ker}\{L\}$ は L のカーネルである. グラフは, 固定で連結であるので,

$$\begin{aligned} \theta &\in \text{span}1 \\ \phi &\in \text{span}1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

となり, flocking が達成されることが示される.

5 おわりに

本レポートでは, 複数台の agent が平面上を動く場合と 3 次元空間を動く場合の flocking 問題について, Ali Jadbabaie らが提案した視覚情報を用いた制御則を紹介した. また, それにより flocking が達成されることを証明した. 今後の課題としては, 藤田研の視覚フィードバックシステムで使われていた幾何学的な数学的表記に基づき, 姿勢まで含めた consensus 問題の見直しが必要である. さらに, flocking などの consensus が達成されるための制御則の導出が課題である.

A 提案された分散制御則の一例

分散制御則 (2.20) が 接続行列 B , $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_N]^T$, $W = \text{diag}\{w_i, w_j, w_k\}$ を用いて (2.22) のように書き直せることを Fig. 7 のような強連結な有向グラフの場合について確認する.

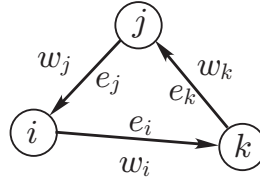


Fig. 7: oriented graph of three agents.

Fig. 7 のようなグラフの接続行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

ともとまる. ここで (2.22) の計算を実際に行うと

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix} &= -BW \sin(B^T \theta) \\
&= - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{diag}\{w_i, w_j, w_k\} \begin{bmatrix} \sin(\theta_i - \theta_k) \\ \sin(\theta_j - \theta_i) \\ \sin(\theta_k - \theta_j) \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} w_i & -w_j & 0 \\ 0 & w_j & -w_k \\ -w_i & 0 & w_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta_i - \theta_k) \\ \sin(\theta_j - \theta_i) \\ \sin(\theta_k - \theta_j) \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} w_i \sin(\theta_i - \theta_k) - w_j \sin(\theta_j - \theta_i) \\ w_j \sin(\theta_j - \theta_i) - w_k \sin(\theta_k - \theta_j) \\ -w_i \sin(\theta_i - \theta_k) + w_k \sin(\theta_k - \theta_j) \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} w_i \sin(\theta_i - \theta_k) + w_j \sin(\theta_i - \theta_j) \\ w_j \sin(\theta_j - \theta_i) + w_k \sin(\theta_j - \theta_k) \\ w_i \sin(\theta_k - \theta_i) + w_k \sin(\theta_k - \theta_j) \end{bmatrix} \tag{A.2}
\end{aligned}$$

と変形でき, (2.20) の形で表わしていることがわかる. 実は, ここで提案されている制御則は, 辺の向きに因らず (A.2) 式のように書けることが分かる. すなわち, グラフ G が連結であれば, 各辺の向きは任意に定めてよい. これをこの問題に置き換えて考えると, 各 agent は近傍の agent に対し, 視覚情報を与えるか得ることができれば, お互いに通信をしなくても, 提案された制御則により flocking が達成されることになる.

参考文献

- [1] 五十嵐, “グラフ理論と consensus 問題,” ゼミ資料 FL06-01-1, 2006.
- [2] Nima Moshtagh, Ali Jadbabaie and Kostas Daniilidis, “Vision-based Distributed Coordination and Flocking of Multi-agent Systems,” N Moshtagh, A. Jadbabaie, K. Daniilidis in S. Thrun, G. Sukhatme, S. Schaal, and O. Brock (Editors), *Robotics: Science and Systems I*, pp. 41–48. MIT Press, 2005.
- [3] Nima Moshtagh, Ali Jadbabaie and Kostas Daniilidis, “Distributed Geodesic Control Laws for Flocking of Nonholonomic Agents,” Accepted as a Technical Note to *IEEE Transactions of Automatic Control*. 2006
- [4] Reza Olfati-Saber, J. Alex Fax and Richard M. Murray, “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems,” *Proceedings of IEEE*, Feb, (Invited Paper, under review).