

Robot Manipulator の受動性に基づいた制御方法

藤田研究室 米村 大輔

平成 18 年 4 月 24 日

1 はじめに

本レポートでは、ロボットマニピュレータの Consensus Problem に関する文献の中で文献 [1] の Mutual Synchronization について述べる。まず、文献 [1] の Mutual Synchronization について述べる前に文献 [1] のもととなったロボットマニピュレータの受動性に基づいた制御方法 [2] について述べる。そして、文献 [1] の Mutual Synchronization について述べる。

2 ロボットマニピュレータの制御

本節では、基本となる Paden, Panja が提案した受動性に基づく (Passivity-based) ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) の制御 [2] についてまとめる。

2.1 制御対象

制御対象としては、 n 自由度 (n Degree of Free, n-DOF) をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) を考える。ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) のダイナミクス (Dynamics) は次式で与えられる [3]。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1)$$

ここで、 $q \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate) , $\tau \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques) , $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix), $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces), $g(q) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である。

ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) (1) において、次の特性がある。

- 慣性行列 $M(q)$ は正定行列 (Positive Definite Matrix) である。
- $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ は歪み対称 (Skew-Symmetric) である。
- 受動特性 (Passivity Property): 入力 τ から出力 \dot{q} に関して受動的であり、これは (2) 式のような定数 $\beta \geq 0$ が存在することである。

$$\int_0^T \dot{q}^T(s)\tau(s)ds \geq -\beta, \quad \forall T \geq 0 \quad (2)$$

次式のような特性をもつ行列 S を歪み対称行列 (Skew Symmetric matrix) という。

$$S + S^T = 0 \quad (3)$$

2.2 制御目的

制御目的はロボットマニピュレータの関節角度 (姿勢) q を与えられた目標関節角度 (姿勢) $q_d(t)$ にすることである。つまり、目標姿勢 (Desired Trajectory) として、目標関節角度、角速度を $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} q &= q_d \\ \dot{q} &= \dot{q}_d \end{aligned} \quad (4)$$

とすることである。

2.3 追従制御 (Tracking Control)

目標姿勢との偏差 (Error) e, \dot{e}, \ddot{e} を次式のようにロボットマニピュレータの姿勢と目標姿勢との差として定義する。

$$\begin{aligned} e &\triangleq q - q_d \\ \dot{e} &\triangleq \dot{q} - \dot{q}_d \\ \ddot{e} &\triangleq \ddot{q} - \ddot{q}_d \end{aligned} \quad (5)$$

新しい制御入力 (New Control Input) を ν として, コントローラ (Controller) τ を次式のように与える。

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_p e + \nu \quad (6)$$

ここで, K_p はコントローラゲイン (Gain) である。

さらに, 新しい制御入力 (New Control Input) ν を次式のように与える。

$$\nu = -K_d \dot{e} \quad (7)$$

ここで, K_d はコントローラゲイン (Gain) である。

コントローラ τ (6) に新しい入力 ν (7) を適用すると次式ようになる。

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_d \dot{e} - K_p e \quad (8)$$

よって, ロボットマニピュレータ (1), コントローラ τ (6), 新しい制御入力 ν (7) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式ようになる。

$$M(q)\ddot{e} = -C(q, \dot{q})\dot{e} - K_d \dot{e} - K_p e \quad (9)$$

結果 ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) (1), コントローラ (Controller) (8) によって形成される閉ループ系 (Closed-loop System) (9) について考える。もし, ゲイン K_p, K_d が正定行列であるなら (Assumption : $K_p > 0, K_d > 0$), 偏差 (Error) e, \dot{e} は漸近安定 (Asymptotically Stable) となる。

証明

ロボットマニピュレータ (1) とコントローラ (6) によって構成される Subsystem は次式ようになる。

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + K_p e = \nu \quad (10)$$

ここで, 上式を次のような Subsystem 1, 2 と見る。

$$\text{Subsystem 1: } \begin{cases} M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} = u_1 \\ y_1 = \dot{e} = u_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Subsystem 2: } \begin{cases} \dot{z} = u_2 \\ y_2 = K_p z = \nu - u_1 \end{cases} \quad (12)$$

Subsystem 1, 2 (11), (12) のブロック図はそれぞれ Fig. 1, 2 のようになり, Subsystem 1, 2 によって構成される Subsystem (10) は Fig. 3 のようになる。

ここで, Subsystem 1 においてエネルギー関数 (Energy Function) V_1 として

$$V_1(\dot{e}) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} \quad (13)$$

を考える。また, Subsystem 2 においてエネルギー関数 (Energy Function) V_2 として

$$V_2(e) = \frac{1}{2} e^T K_p e \quad (14)$$

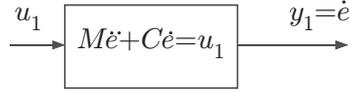


Fig.1: Subsystem 1 のブロック図

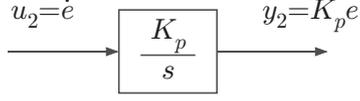


Fig.2: Subsystem 2 のブロック図

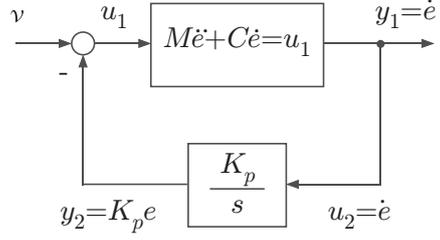


Fig.3: Subsystem のブロック図

を考える. ここで, エネルギー関数 V_1, V_2 はそれぞれ \dot{e}, e に対して二次形式となっており, $M(q) > 0, K_p > 0$ より, 正定関数 (Positive Function) となっていることがわかる.

エネルギー関数 (Energy Function) V_1, V_2 (13), (14) の時間微分 (time derivative) はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(\dot{e}) &= \frac{1}{2} \left(\ddot{e}^T M(q) \dot{e} + \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} + \dot{e}^T M(q) \ddot{e} \right) \\
 &= \dot{e}^T M(q) \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} \\
 &= \dot{e}^T M(q) M(q)^{-1} (-C(q, \dot{q}) \dot{e} + u_1) + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{Subsystem 1 (11) より} \\ \ddot{e} = M(q)^{-1} (-C(q, \dot{q}) \dot{e} + u_1) \end{array} \right) \\
 &= -\dot{e}^T C(q, \dot{q}) \dot{e} + \dot{e}^T u_1 + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} \\
 &= \dot{e}^T u_1 + \frac{1}{2} \dot{e}^T \left(\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{e} \\
 &= \dot{e}^T u_1 \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \because \text{歪み対称性 (Skew-Symmetric) より} \\ \dot{e}^T \left(\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{e} = 0 \end{array} \right) \\
 &= y_1^T u_1
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(e) &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T K_p e + e^T K_p \dot{e}) \\
 &= \dot{e}^T K_p e \\
 &= (K_p e)^T \dot{e} \\
 &= y_2^T u_2
 \end{aligned} \tag{16}$$

となり, それぞれ Subsystem 1, 2 の入力 u と出力 y の積で表せることがわかる. ここで, エネルギー関数 (Energy Function) V_1 の時間微分 (Time Derivative) は歪み対称性 (Skew-Symmetric) を用いることで Subsystem 1 の入力 u_1 と出力 y_1 の積で表せる.

よって, Subsystem 1, 2 それぞれの入力 u と出力 y の内積はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 \langle u_1, y_1 \rangle &= \int_0^T y_1^T(s) u_1(s) ds \\
 &= \int_0^T \dot{V}_1(\dot{e}(s)) ds \\
 &= V_1(\dot{e}(T)) - V_1(\dot{e}(0)) \\
 &\geq -V_1(\dot{e}(0)) \triangleq -\beta_1
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_2, y_2 \rangle &= \int_0^T y_2^T(s) u_2(s) ds \\
&= \int_0^T \dot{V}_2(e(s)) ds \\
&= V_2(e(T)) - V_2(e(0)) \\
&\geq -V_2(e(0)) \triangleq -\beta_2
\end{aligned} \tag{18}$$

となり, Subsystem 1, 2 それぞれがそれぞれの入力 u から出力 y に関して (Fig. 1 における入力 (Input) u_1 , 出力 (Output) y_1 , Fig. 2 における入力 (Input) u_2 , 出力 (Output) y_2), 受動的 (Passive) であることを示している. Subsystem 1, 2 (11), (12) によって構成される Subsystem (10) に対応するエネルギー関数 V を次式のように与える.

$$\begin{aligned}
V(e, \dot{e}) &= V_1(\dot{e}) + V_2(e) \\
&= \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e
\end{aligned} \tag{19}$$

ここで, エネルギー関数 V_1, V_2 (13), (14) はそれぞれ正定関数 (Positive Function) であったことから, Subsystem (10) に対応するエネルギー関数 V も正定関数 (Positive Function) であることがわかる.

エネルギー関数 V (19) の時間微分 (Time Derivative) はエネルギー関数 V_1, V_2 の時間微分 (time derivative) (15), (16) より,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \dot{e}) &= \dot{V}_1(\dot{e}) + \dot{V}_2(e) \\
&= y_1^T u_1 + y_2^T u_2
\end{aligned} \tag{20}$$

となり, さらに Subsystem 1, 2 の連結 (Interconnection) $y_1 = u_2, y_2 = \nu - u_1$ より,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \dot{e}) &= \dot{V}_1(\dot{e}) + \dot{V}_2(e) \\
&= y_1^T u_1 + (\nu - u_1)^T y_1 \\
&= y_1^T \nu \\
&= \dot{e} \nu
\end{aligned} \tag{21}$$

となり, 入力 ν と出力 \dot{e} の積で表せることがわかる. よって, Subsystem の入力 ν と出力 \dot{e} の内積は

$$\begin{aligned}
\langle \nu, \dot{e} \rangle &= \int_0^T \dot{e}^T(s) \nu(s) ds \\
&= \int_0^t \dot{V}(e(s), \dot{e}(s)) ds \\
&= V(e(t), \dot{e}(t)) - V(e(t), \dot{e}(0)) \\
&\geq -V(e(0), \dot{e}(0)) \\
&= -V_1(\dot{e}(0)) - V_2(e(0)) \\
&= -\beta_1 - \beta_2 \triangleq -\beta
\end{aligned} \tag{22}$$

となり, 入力 ν から出力 \dot{e} に対して Subsystem は受動的 (Passive) であることがわかる. つまり, ロボットマニピュレータ (1) とコントローラ τ (6) によって構成される Subsystem (Fig. 3) が受動的 (Passive) である.

ここで, Subsystem (10) と新しい制御入力 ν (7) によって構成される閉ループ形 (Closed-loop System) (9) を考えると, Fig. 4 のようになる.

リアプノフ関数 (Lyapunov Function) 候補として, Subsystem のエネルギー関数 V (19) を考える. エネルギー関数 V (19) の時間微分 (Time Derivative) は (21) 式より,

$$\dot{V}(e, \dot{e}) = \dot{e} \nu \tag{23}$$

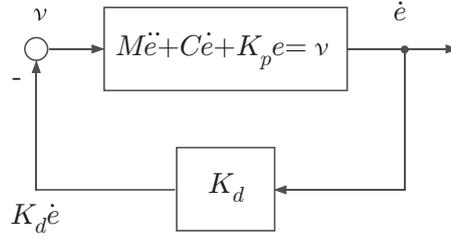


Fig.4: 閉ループ系のブロック図

であり, 新しい制御入力 ν (7) を適用すると,

$$\begin{aligned}\dot{V}(e, \dot{e}) &= \dot{e}(-K_d \dot{e}) \\ &= -\dot{e}K_d \dot{e} \\ &\leq 0\end{aligned}\tag{24}$$

となり, 半負定 (Negative semi-definite) となる. したがって, ラサールの不変性原理 (*LaSalle's Invariant Principle*) を使うことによって, 偏差 (Error) e, \dot{e} の漸近安定 (Asymptotically Stable) が言える. つまり, 偏差 (Error) の定義 (5) より, $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow \dot{q}_d, t \rightarrow \infty$ が言える.

しかし, まだラサールの不変性原理 (*LaSalle's Invariant Principle*) を用いて漸近安定 (Asymptotically Stable) が言えていないので, 今後確認する必要がある.

3 Synchronization

まず, 本章ではロボットマニピュレータの Mutual Synchronization について述べる.

ロボットマニピュレータの Mutual Synchronization 問題の概念図は Fig. 6 のように示される. Fig. 6 はロボットマニピュレータが 4 台の場合である. また, Fig. 6 の制御対象である 4 台のロボットマニピュレータの連結部だけを抜き出した図を Fig. 5 に示す. $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, i = 1, \dots, 4$ は Robot $i, i = 1, \dots, 4$ の関節角度, 角速度, 角加速度を表しており, $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$ はすべてのロボットマニピュレータに共通の目標関節角度, 角速度, 角加速度を表している. Fig. ?? では各ロボットマニピュレータは他のすべてのロボットマニピュレータと通信することで, すべてのロボットマニピュレータの関節角度, 角速度, 角加速度 q, \dot{q}, \ddot{q} を得ることができるとしている. 以上の状況において, Mutual Synchronization は共通の目標関節角度, 角速度に追従させ, 他のロボットマニピュレータの関節角度, 角速度と同期させることである. つまり,

$$\begin{aligned}q_1 &= \dots = q_p = q_d \\ \dot{q}_1 &= \dots = \dot{q}_p = \dot{q}_d\end{aligned}\tag{25}$$

となることである. 一般的にロボットマニピュレータが p 台とすると, Mutual Synchronization 問題はこの目的を達成するためのコントローラ $\tau_i, i = 1, \dots, p$ を設計することである.

4 文献 [1] の問題設定

制御対象としては, p 台の n (n Degree of Free, n-DOF) 自由度をもつロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) を考え, ロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) はすべて同一のものとする. i 番目のロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) のダイナミクス (Dynamics) は次式で与えられる.

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i, \quad i = 1, \dots, 4\tag{26}$$

ここで, $q_i \in \mathbb{R}^n$ は関節角度 (Joint Coordinate), $\tau_i \in \mathbb{R}^n$ は入力トルク (Torques), $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列 (Positive Definite Inertia Matrix), $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は遠心力・コリオリ力項 (Coriolis and Centrifugal Forces), $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^n$ は重力項 (Gravity Forces) である.

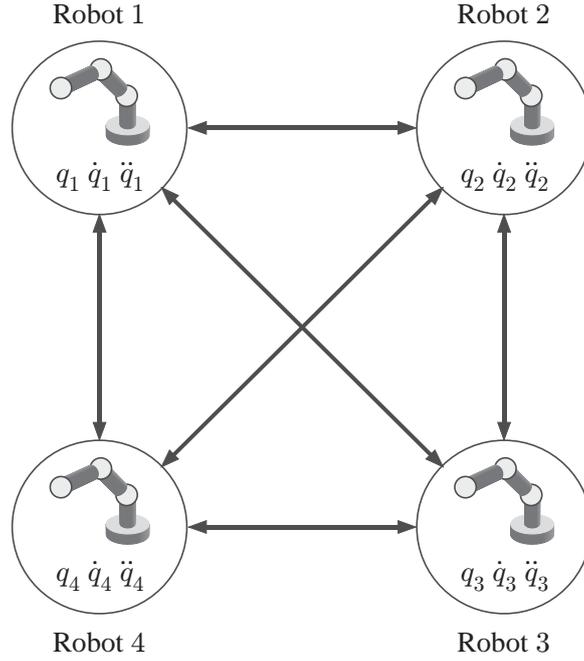


Fig.5: Robot の Mutual Synchronization の概略図

特性は 2.1 節と同様である.

すべてのロボットマニピュレータ (Robot Manipulator) (26) に対し共通の目標軌道 (Common Desired Trajectory) として, 共通の目標関節角度, 角速度を q_d, \dot{q}_d とおく.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する目標値信号 (Reference Signal) $q_{ri}, \dot{q}_{ri}, \ddot{q}_{ri}$ を次式のように定義する.

$$\begin{aligned}
 q_{ri} &\triangleq q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} (q_i - q_j) \\
 \dot{q}_{ri} &\triangleq \dot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} (\dot{q}_i - \dot{q}_j) \\
 \ddot{q}_{ri} &\triangleq \ddot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^p K_{i,j} (\ddot{q}_i - \ddot{q}_j)
 \end{aligned} \tag{27}$$

ここで, ゲイン $K_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は半正定対角行列 (Positive Semi-definite Diagonal Matrix) である. 上式で定義された目標値信号 (Reference Signal) (27) は文献 [?] の Coupling Error を使っており, 文献 [1] においてポイントとなっている.

ここで, (27) 式の目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} の定義式に注目する. 定義式の右辺第 2 項は i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) の関節角度 q_i とそのほかのロボットマニピュレータ (j th Robot Manipulator) ($j = 1, \dots, p, j \neq i$) の関節角度 q_j との差分のゲイン $K_{i,j}$ 倍になっており, これがポイントとなっている Coupling Error であり, Synchronization をするための補助定理 (Lemma) で用いられる. そして, (27) 式より, i 番目のロボットマニピュレータの関節角度の目標値信号 q_{ri} は共通の目標関節角度 q_d と Coupling Error との差で定義されている.

i 番目のロボットマニピュレータ (i th Robot Manipulator) に対する Synchronization Error s_i, \dot{s}_i を次式のように定義する.

$$s_i \triangleq q_i - q_{ri}$$

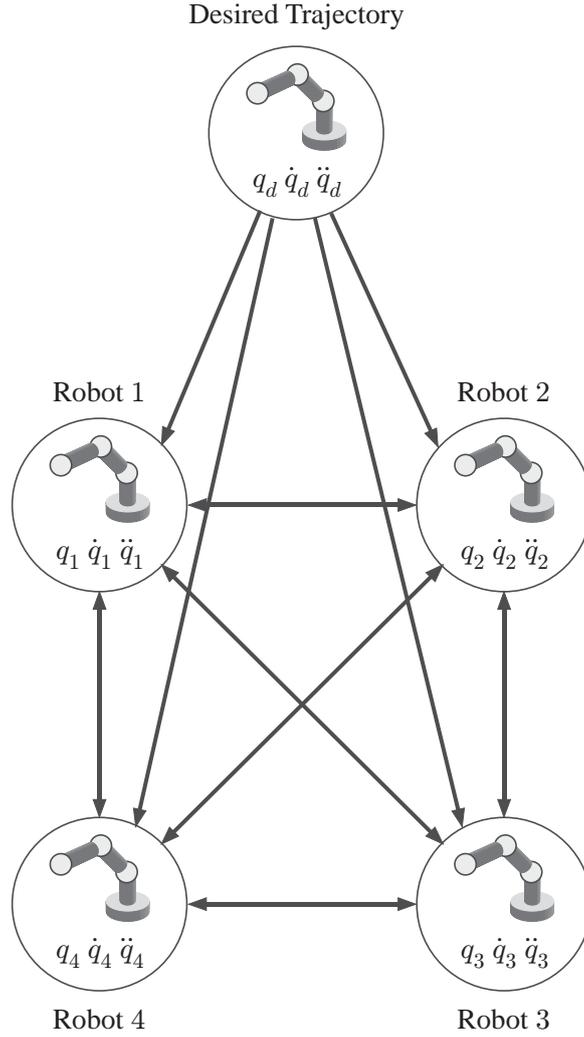


Fig.6: Robot の Mutual Synchronization の概略図

$$\dot{s}_i \triangleq \dot{q}_i - \dot{q}_{ri} \quad (28)$$

Synchronization Error s_i , \dot{s}_i は関節角度, 角速度 q_i , \dot{q}_i と対応する関節角度, 角速度の目標値信号 (Reference Signal) q_{ri} , \dot{q}_{ri} との差として定義されている.

i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) を ν_i としてコントローラ (Controller) τ_i を次式のように与える.

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{p,i}s_i + \nu_i \quad (29)$$

ここで, $K_{p,i}$ はコントローラゲインである.

さらに, i 番目のロボットマニピュレータに対して, 新しい制御入力 (New Control Input) ν_i を次式のように与える.

$$\nu_i = -K_{d,i}\dot{s}_i \quad (30)$$

ここで, $K_{d,i}$ はコントローラゲインである.

i 番目のロボットマニピュレータにおいて, コントローラ τ_i (29) に新しい制御入力 ν_i (30) を適用すると次式のようなになる.

$$\tau_i = M_i(q_i)\ddot{q}_{ri} + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{ri} + g_i(q_i) - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i \quad (31)$$

よって, i 番目のロボットマニピュレータ (26) とそれに対するコントローラ τ_i (29), 新しい制御入力 ν_i (30) によって構成される閉ループ系 (Closed-loop System) は次式のようなになる.

$$M_i(q_i)\ddot{s}_i = -C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{s}_i - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (32)$$

定理 1 ロボットダイナミクス (26), コントローラ (31), 目標値信号 (27) によって形成される閉ループ系 (32) について考える. もし, ゲイン $K_{d,i}, K_{p,i}, i = 1, \dots, p$ が正定行列であるなら, Synchronization Error $s_i, \dot{s}_i, i = 1, \dots, p$ は大域的に漸近安定である.

補助定理 (34) 式で目標値信号 (27) の Coupling Matrix $K_{i,j}, i, j = 1, \dots, p$ を使って表される Diagonally Dominant Matrix $M_c(K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times (n \cdot p)}$ について考え, このとき, $M_c(K_{i,j})$ は多構造のシステムにおいてロボット間の Coupling Matrix として考えられる.

行列 $M_c(K_{i,j})$ はすべての半正定対角行列 $K_{i,j}, i, j = 1, \dots, p$ に対して正則である. さらに, すべての半正定対角行列 $K_{i,j}, i, j = 1, \dots, p$ に対して

$$M_c(K_{i,j}) \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ \vdots \\ q_d \end{bmatrix} \quad (33)$$

の関係を保つ.

$$M_c(K_{i,j}) = \begin{bmatrix} \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq 1}^p K_{1,j} \right) & -K_{1,2} & \cdots & -K_{1,p} \\ -K_{2,1} & \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq 2}^p K_{2,j} \right) & \cdots & -K_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \\ -K_{p,1} & -K_{p,2} & \cdots & \left(I_n + \sum_{j=1, j \neq p}^p K_{p,j} \right) \end{bmatrix} \quad (34)$$

この補助定理を使うことによって, Synchronization Error の漸近安定 $s_i \rightarrow 0, \dot{s}_i \rightarrow 0, t \rightarrow 0 (i = 1, \dots, p)$ と Synchronization q_i が等価となることが言える. 補助定理の証明もまだ行えていない. したがって今後証明する必要がある.

5 おわりに

本レポートでは, ロボットマニピュレータの受動性に基づいた制御方法 [2] について述べ, 文献 [1] の Mutual Synchronization について述べた.

しかし, 問題設定についての説明, 定理の証明が不十分であるので, 今後はその点を補いたい. また, シミュレーションなども行っていきたい.

参考文献

- [1] A. Rodriguez-Angelès and H. Nijmeijer, “Mutual Synchronization of Robots via Estimated State Feedback : A Cooperative Approach,” *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 12, No. 4, pp. 542–554, 2004.

- [2] B. Paden and R. Panja, "Globally Asymptotically Stable 'PD+' Controller for Robot Manipulators," *Int. J. Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1697–1712, 1988.
- [3] M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasager, *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006.
- [4] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland and B. Maschke, *Dissipative Systems Analysis and Control Theory and Applications*. Springer, 2000.