

# グラフ理論と consensus 問題

## Graph Theory and Consensus Problem

藤田研究室 五十嵐 裕司

平成 18 年 4 月 10 日

### 1 はじめに

近年, consensus 問題が注目を集め, 2005 年 ACC では survey を出されている [1]. 本レポートでは consensus 問題に使われるグラフ理論の基礎と基本的な consensus 問題の安定性 (stability) の証明 [2] について述べる.

### 2 グラフ理論

この章では [7],[8] に基づき, グラフ理論の基礎について述べる. グラフ (graph) とは頂点 (node) と辺 (edge) からなる図形である. 頂点の集合を  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , 辺の集合を  $E \subseteq V \times V$  とするとグラフ  $G$  は  $G = (V, E)$  と表される. もし辺  $e_i$  が点  $v_j$  と  $v_k$  を結ぶ辺ならば  $e_i = (v_j, v_k)$  と書く.

グラフには辺に向きがある無向グラフ (undirected graph) と辺に向きがない有向グラフ (directed graph, digraph) の 2 種類がある. Fig.1, Fig.2 に無向グラフと有向グラフの例を示す. consensus 問題において無向グラフとは常に双方向通信ができる状況を示しており, 有向グラフは片方のみから通信ができる状況を含むことを示している.

また辺に重みが付いているグラフのことを重み付きグラフ (weighted graph) という. Fig.3 に重み付きグラフの例を示す.

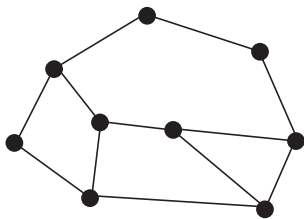


Fig. 1: undirected graph

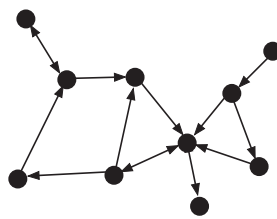


Fig. 2: digraph

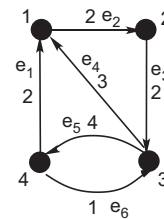


Fig. 3: weighted graph

また, グラフ  $G$  の任意の 2 つの頂点  $v_i, v_j$  に対して,  $v_i, v_j$  を結ぶ経路が存在するとき  $G$  は連結 (connected) であるという. また有向グラフにおいては有向グラフ  $G$  の全ての辺の向きがない場合, 連結であれば, 連結有向グラフという. また有向グラフに対しては強連結 (strongly connected) という概念がある. 強連結とは有向グラフ  $G$  が任意の 2 点  $v_i, v_j$  に対して,  $v_i$  から  $v_j$  への経路と  $v_j$  から  $v_i$  への経路が存在することをいう. 先ほどあげた例では, Fig.1 は連結であり, Fig.2 は連結有向グラフである. しかし Fig.2 は強連結グラフではない. それは一番右上の頂点へ行く経路が存在しないからである. Fig.4 に強連結であるグラフの例を載せる.

グラフを数式で扱うには, グラフを数式で表す必要がある. 一般にグラフは行列 (matrix) を用いて数式として表現されるが, グラフの行列表現にはいろいろある. ここでは隣接行列 (adjacent matrix), 接続行列 (incident matrix), 次数行列 (degree matrix), グラフラプラジアン (graph laplacian) について [8] と [2] を参考に説明する.

今, 頂点の数 (位数) が  $n$  のグラフ  $G$  を考える. このグラフの点集合を  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  とするとき隣接行

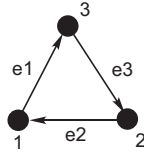


Fig. 4: strongly connected graph

列 (adjacent matrix)  $A = (a_{ij})$  は以下の様に定義される.

$$a_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{辺 } (v_i, v_j) \in E(G) \text{ のとき} \\ 0 & \text{辺 } (v_i, v_j) \in E(G) \text{ でないとき} \end{cases}$$

グラフの位数が  $n$  の場合,  $A$  は  $n \times n$  の行列となる. 無向グラフの場合,  $v_i$  と  $v_j$  が隣接しているならば必ず  $v_j$  と  $v_i$  が隣接するので隣接行列は必ず対称行列 (symmetric matrix) となることがわかる. ただし, 有向グラフの場合は必ずしも隣接行列は対象行列とはならない. また, 先にあげたグラフの強連結性の条件は隣接行列を使うと次のように表現される [10](pp.24).

グラフが強連結でない必要十分条件は, そのグラフの隣接行列が可約であることである

ここで可約とは行と列の同時入れ替えを行うと, ブロック三角行列が得られる行列のことである [10](pp.11).

次に接続行列について説明する. 接続行列 (incident matrix)  $M = (m_{ij})$  は無向グラフの場合以下のように定義される.

$$m_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{辺 } e_j \text{ がループでなく, かつ } v_i \text{ が } e_j \text{ に接続しているとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1)$$

また, 有向グラフの場合は以下のような定義となる.

$$m_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{辺 } e_j \text{ がループでなく, かつ } v_i \text{ が } e_j \text{ の始点となっているとき} \\ -1 & \text{辺 } e_j \text{ がループでなく, } v_i \text{ が } e_j \text{ の終点となっているとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (2)$$

以下に隣接行列と接続行列の例を挙げる.

また, 無向グラフにおいては次数行列 (degree matrix)  $D = (d_{ij})$  が以下のように定義される [8].

$$d_{ij} \triangleq \begin{cases} d(v_i) & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (3)$$

ここで  $d(v_i)$  は次数 (degree) と呼ばれ, 各点に接続している辺の個数のことである. 定義より明らかに, 次数行列は対角成分以外は 0 である. また定義より,  $d_i \geq 0$   $i = \{1, \dots, n\}$  であり,  $D$  はグラフが連結であれば正定な行列である.

次の行列  $L \in R^{n \times n}$  はグラフラプラジアン (graph Laplacian) と呼ばれる [9].

$$L \triangleq D - A \quad (4)$$

グラフラプラジアンは半正定 (semi-positive definite) な行列である. グラフラプラジアンの重要な性質として以下のものがある.

$$L\mathbf{1} = 0 \quad (5)$$

ここで  $\mathbf{1} \triangleq \{1, \dots, 1\}^T$  である. このことよりグラフラプラジアンは同じ値の要素を持つベクトルとの積はゼロになることがわかる. また上式より

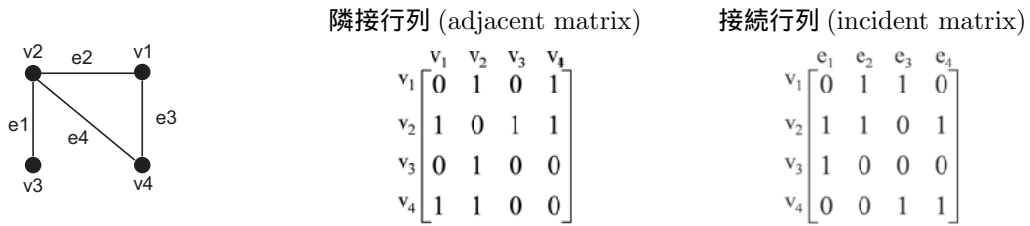


Fig. 5: adjacent matrix and incident matrix of undirected graph

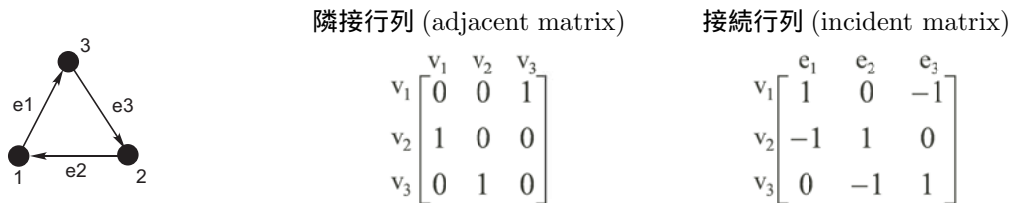


Fig. 6: adjacent matrix and incident matrix of digraph



Fig. 7: adjacent matrix and incident matrix of weighted graph

1. グラフラプラジアンは固有値 (eigenvalue)0 を必ずもつ
2. グラフラプラジアンはフルランクではない

ことがわかる. この性質は consensus 問題の安定性 (stability) の証明に使われる重要な性質である. またグラフ  $G$  が無向グラフならば

$$\mathbf{1}^T L = 0 \tag{6}$$

も成り立つ.

また, グラフ  $G$  が無向グラフならば連結, 有効グラフならば強連結であれば

$$\text{rank} L = n - 1 \tag{7}$$

であることが知られている [2].

### 3 基本的な consensus の問題

この章では文献 [2] に基づき, 基本的な consensus 問題を取り扱う

#### 3.1 問題の定式化と制御目的

ダイナミクス (dynamics)

$$\dot{x}_i = u_i \tag{8}$$

を持つ複数の agent がいる状況を考える. ここで  $x_i \in R$  は状態 (state) であり,  $u_i \in R$  は入力 (input) である. またグラフ  $G = (V, E)$  を考える. ここで  $V = \{1, \dots, n\}$  は頂点集合であり,  $E = \{(i, j) \in V \times V\}$  は辺集合であ

る.  $A = (a_{ij})$  をグラフ  $G$  の隣接行列とする. また agent  $i$  の近傍 (neighborhood) を以下のように定義 (definition) する.

$$N_i \triangleq \{j \in V : a_{ij} \neq 0\} \quad (9)$$

今回はグラフは無向グラフで固定 (fixed), 連結 (connected) であると仮定する.

consensus 問題の制御目標は各 agent の状態  $x_i$  を一定の値に収束 (convergence) させることである. つまり

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha \quad \forall i \\ x &= \alpha \mathbf{1} \end{aligned} \quad (10)$$

である. ここで  $x \triangleq \{x_1, \dots, x_n\}^T$  であり,  $\mathbf{1} \triangleq \{1, \dots, 1\}^T$  である. この時  $\alpha$  のことを collective decision と呼ぶ. この時, 入力  $u_i$  を

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \quad (11)$$

とすると consensus が達成されることが知られている [2]. この入力を入れたときのダイナミクスは

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \quad (12)$$

となる. 式 (12) はグラフラプラジアン  $L$  を用いると以下のように書き換えることができる.

$$\dot{x} = -Lx \quad (13)$$

ここでグラフラプラジアン  $L$  は式 (4) のように定義される. このことをブロック線図 (block diagram) で書くと Fig.8 のように表される.

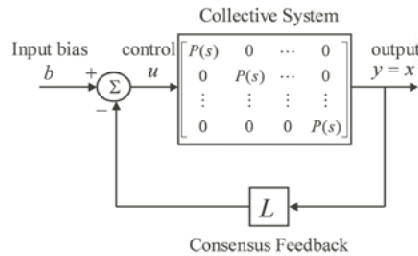


Fig. 8: block diagram of consensus problem

システムの状態が全て同じ値に収束することが証明できれば consensus が達成されたことになる. consensus といっても場合によってはランデブー (rendezvous)(Fig.9), フロッキング (flocking)(Fig.10), agreement などと言われる場合もある.



Fig. 9: rendezvous

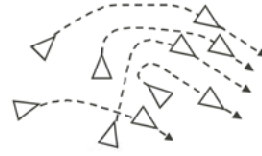


Fig. 10: flocking

### 3.2 収束性の証明

次にダイナミクス (13) を持つシステムの状態が同じ値に収束することを示す. ここではラ・サールの不変定理 (LaSalle's invariant principle) を使った証明を行う. まずリアプノフの関数の候補として以下のようなグラフラプラジアン (quadratic form) を考える.

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx \quad (14)$$

この関数は展開してみるとグラフラプラジアンの定義から

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E} a_{ij}(x_j - x_i)^2 \quad (15)$$

となる. 式 (15) を見てみると右辺は SOS(Sum of Square) となっていることがわかる. つまりグラフラプラジアンの二次形式  $V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx$  は半正定 (semi-positive definite) であることがわかる. これで  $V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx$  はリアプノフ関数 (lyapunov function) の候補として妥当な関数であるが示された. 次にリアプノフ関数の候補の微分を計算してみると

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{x}^T Lx + x^T L\dot{x}) \\ &= -x^T L^T Lx \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

である. ここで注意したいのは  $\dot{V}(x)$  は負定ではなく非正定 (semi-negative definite) となることである.  $\dot{V}(x)$  が非正定となるのはグラフラプラジアンの性質である

$$L\mathbf{1} = 0 \quad (17)$$

よりからわかる. つまりリアプノフの安定性定理だけでは安定性 (consensus の達成) は証明できない. ここでラ・サールの不変定理を使う.

次にラ・サールの不変定理の一般系を証明なしで述べる.

次のシステムの考える

$$\dot{x} = f(x) \quad (18)$$

ここで  $f : D \rightarrow R^n$  で  $f$  は locally Lipschitz であるとする. このようなシステムに対してラ・サールの不変定理は以下の形で述べられる [6].

補題 3.1 ラ・サールの不変定理 (LaSalle's invariant principle)

$\Omega \subset D$  をシステム (18) に対して positively invariant でコンパクト (compact) な集合 (set) であるとする. また  $V : D \rightarrow R$  を連続微分可能 (differentiable) な関数 (function) であり,  $\Omega$  内で  $\dot{V} \leq 0$  となるものとする.  $E$  を  $\Omega$  内

で  $\dot{V}(x) = 0$  となるような点の集合とする. また  $M$  を  $E$  内で最も大きい不変集合とする. すると  $\Omega$  内から始まるシステム 18 の解 (solution) は  $t \rightarrow \infty$  で  $M$  に近づく.

ラ・サールの不変定理を使うにあつて  $\Omega, M, E$  と  $V$  の定義が必要である. 次に定理の形に沿つて consensus 問題の安定性の証明を行う.

今, システム (13) を考える. システム (13) と (18) を見比べると  $f(x) = -Lx$  であることがわかり, 今回の場合  $f: R^n \rightarrow R^n$  であり,  $f$  は locally Lipschitz (実は globally Lipschitz) であることがわかる. 次に  $\Omega$  を以下のように定義する.

$$\Omega \triangleq \{x | V(x) \leq c\} \quad c \in [0, \infty) \quad (19)$$

ここで,  $V(x)$  は式 (14) で表される関数である. 次に今, 定義した集合  $\Omega$  が positively invariant でコンパクトな集合であるかを確かめなければならない. まず,  $\Omega$  の定義からコンパクト (有界 (bounded) で閉集合 (close set)) であることは明らかである. また式 (16) より  $V(x)$  は非増加関数であるので  $\Omega$  は potively invariant であることがわかる. 次に集合  $E$  を以下のように定義する.

$$E = \{x | x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\} \quad (20)$$

$\dot{V}(x)$  は式 (16) で表される. 最後に  $M$  を求めるが, 今回の場合は  $E$  自体が positively invariant なので  $M = E$  となる. よつて  $\Omega$  内から始まるシステム (13) の解は  $E$  へ収束することとなる. 今回の場合, 式 (19) の  $c$  は有界ならば任意の数を取れるので, 有界な初期値に対して, 収束が証明されたいことになる. 最後に一定値に収束すること証明する. これは  $E$  の要素が  $x = \alpha \mathbf{1}$  のみであることを証明すればよい.

まず  $\dot{V}(x) = 0$  となる場合を考える. これは式 (16) より

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = 0 &\Rightarrow -x^T L^T L x = 0 \\ &\quad -(Lx)^T (Lx) = 0 \end{aligned}$$

となる. これより

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow Lx = 0 \quad (21)$$

となり, グラフラプラジアン の性質 (5),(7),(17) より

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha \mathbf{1} \quad (22)$$

となることがわかる. これより,  $\dot{V}(x) = 0$  を満たすのは  $x = \alpha \mathbf{1}$  となり, ラ・サールの不変定理より  $x = \alpha \mathbf{1}$  へ収束することが言える. つまりダイナミクス (8) に対し (11) の入力を入れることで consensus が達成されることがわかる.

文献 [2] では安定性の証明に関しては

1. グラフラプラジアン  $L$  が半正定である
2. システムのダイナミクス (12) の平衡点 (equilibrium point) が式 (10) のみである

という性質から大域的な漸近安定性が言えると書いてあり, 詳しい安定性の証明が載っていない. 本レポートではこの部分に関しては [3] を参考に, 少し詳しい説明を加えた.

### 3.3 consensus の場所の求め方

今までの説明でダイナミクス (8) に対して, 入力 (11) の入力を加えることによって consensus が達成されることが説明された. しかし, 今までの説明では各 agent の状態が同じ値に収束することは説明されたが, どのような値に収束するかはまだ議論されていない. 次に収束値に関する説明を行う. この部分も [2] の section2 の最初の証明では各 agent の初期状態 (initial state) の平均値 (average) に収束するとまでは書いてあるがその証明までは載っていない. ここでは文献 [2] の pp.9 に書いてある Theorem1 の証明を参考に説明をする.

consensus の場所 (collective decision などと言う) は閉ループ系 (close system)(13) に対して不変量を見つけることによって示される. 実は今回の場合は

$$y = \sum_{i=1}^n x_i = \mathbf{1}^T x \quad (23)$$

が不変量である. なぜなら式 (23) の微分を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mathbf{1}^T \dot{x} \\ &= -\mathbf{1}^T Lx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

となることよりわかる. ここで無向グラフのグラフラジアン<sup>2</sup>の性質 (6) を使った. もし, consensus が達成されたならば  $x = \alpha \mathbf{1}$  となるので式 (23) が不変量となることより

$$y = \mathbf{1}^T x(0) = \mathbf{1}^T \alpha = n\alpha \quad (25)$$

となることがわかる. ここで  $n$  は全ての agent の数であり,  $x(0)$  は agent の初期値である. 式 (25) を  $\alpha$  について解くと

$$\alpha = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0) \quad (26)$$

となり, 各 agent の初期状態の平均値が consensus の場所であることがわかる. このように各 agent の初期状態の平均値が consensus の場所であることを average consensus と呼ぶ [2].

### 3.4 consensus 問題の別の定式化

この節では [2] にあげられている consensus 問題の別の定式化について述べる.

今, 式 (27) のダイナミクス (dynamics) をもつ agent に対し, 式 (28) の入力を加えたシステムを考える.

$$\dot{x}_i = u_i \quad (27)$$

$$u_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_j - x_i) \quad (28)$$

式 (27) に式 (28) を代入すると

$$\dot{x}_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_j - x_i) \quad (29)$$

となる. ここで,  $|N_i|$  は agent  $i$  に対する近傍 (neighborhood) の数であり, 各ノード (node) の次数 (degree) に一致する. また全ての agent に対して式 (29) をまとめると式 (30) のように書ける.

$$\dot{x} = -Qx \quad (30)$$

ここで,  $Q$  は以下の様に定義される.

$$Q \triangleq I - D^{-1}A \quad (31)$$

$I$  は単位行列 (identity matrix) であり,  $D$  はグラフ  $G$  の次数行列 (degree matrix),  $A$  はグラフ  $G$  の隣接行列 (adjacent matrix) である. また文献 [2] では  $D^{-1}A$  のことを正規化隣接行列 (normalized adjacency matrix) と呼んでいる. この定義では  $D^{-1}$  の存在性が気になるが, もしグラフ  $G$  が連結であれば孤立点が存在しないので (逆に言うと各ノードは必ず他のノードと結ばれている) 各ノードの位数は  $d_i > 0 \forall i$  となっている. 次数行列  $D$  の定義は  $D \triangleq \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  なのでグラフ  $G$  が連結であれば位数行列は正定 (positive definite) になることがわかる. これよりグラフ  $G$  が連結であれば次数行列  $D$  は逆行列を必ず持つことがわかる.

式 (31) で定義した  $Q$  はグラフラプラジアン  $L$  は以下の関係にあることが定義からわかる.

$$Q = D^{-1}L \quad (32)$$

また,  $Q$  をグラフラプラジアンの定義としている文献もある [5].

式 (32) で定義した  $Q$  もグラフラプラジアン  $L$  の性質

$$Q\mathbf{1} = 0 \quad (33)$$

を持つことは式 (32) よりわかる. しかし一般的には

$$\mathbf{1}^T Q \neq 0 \quad (34)$$

であることに注意されたい.

### 3.5 別形式の consensus 問題の安定性の証明

この章では別形式の consensus 問題 (31) の安定性の証明を行う. 基本的な流れは 3.2 節の収束の証明と同じであり, ラ・サールの不変定理 (LaSalle's invariant principle) を使って収束の証明を行う.

まず, リヤプノフ関数 (lyapunov function) の候補として次の関数を考える.

$$V'(x) = \frac{1}{2}x^T Qx \quad (35)$$

この関数は半正定 (semi-positive definite) である. 次にこの関数を微分すると

$$\begin{aligned} \dot{V}'(x) &= \frac{1}{2}\dot{x}^T Qx + \frac{1}{2}x^T Q\dot{x} \\ &= -x^T Q^T Qx \leq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

となる. これより, リヤプノフ関数の微分が非正定 (semi negative definite) となるのでリヤプノフの安定定理では収束がいえないことがわかる. よって, ラ・サールの不変定理を使う. まず, 次の集合を考える.

$$\Omega' \triangleq \{x | V'(x) \leq c'\} \quad c' \in [0, \infty) \quad (37)$$

次にこの集合が positively invariant でコンパクト (compact) であることを示さなければならない. まず  $\Omega'$  の定義から有界 (bounded) で閉集合 (close set) であることがわかるので  $\Omega'$  はコンパクトな集合であることがわかる. また式 (36) より  $V'(x)$  は非増加関数であるので式 (37) で定義した集合  $\Omega'$  は positively invariant であることがわかる. 次に集合  $E'$  を以下のように定義する.

$$E' \triangleq \{x | x \in \Omega, \dot{V}'(x) = 0\} \quad (38)$$

最後に集合  $M'$  を求めるが今回の場合も  $E'$  自体が positively invariant なので  $M' = E'$  となる. よって  $\Omega'$  内から始まるシステム (30) の解は  $E$  へ収束することになる. 今回の場合, 式 (37) の  $c'$  は有界で正の値ならば任意に取れるので, 有界な初期値に対して収束が証明される. 次に  $E'$  の要素を求める.  $E'$  の要素を求めるには  $\dot{V}'(x) = 0$  となるような  $x$  を求めればよい. よって  $E'$  の要素は

$$\begin{aligned} \dot{V}'(x) = 0 &\Rightarrow -x^T Q^T Qx = 0 \\ &\quad -(Qx)^T (Qx) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$



これより

$$\dot{V}'(x) = 0 \Rightarrow Qx = 0 \quad (40)$$

となればよいことがわかる。  $Q\alpha\mathbf{1} = 0$  となることとグラフが強連結ならば  $\text{rank}Q = n - 1$  となることより

$$Qx = 0 \Rightarrow x = \alpha\mathbf{1} \quad (41)$$

となり, consensus が達成されることが示される。

### 3.6 別形式の consensus 問題の collective decision の証明

この節では式 (30) 形式の consensus 問題の collective decision を求める。ただし, 別形式の consensus 問題といっても, 3.3 節で説明した通り, collective decision の求め方はシステムに対して不変量を見つけることである。

閉ループ系 (close system)(30) に対して collective decision を求めてみる。今回の場合は

$$y = \sum_{i=1}^n d_i x_i = \mathbf{1}^T D x \quad (42)$$

が不変量となる。実際に式 (42) の微分を計算してみると

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mathbf{1}^T D \dot{x} \\ &= -\mathbf{1}^T D Q x \quad \text{式 (30) より} \\ &= -\mathbf{1}^T L x \quad \text{式 (32) より} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

となる。これにより式 (42) が不変量であることがわかる。よって collective decision は

$$y = \mathbf{1}^T D x(0) = \sum_{i=1}^n d_i x_i(0) = \sum_{i=1}^n d_i \alpha \quad (44)$$

より

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n d_i x_i(0)}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad (45)$$

となる。つまり, 式 (30) 形式の consensus では初期値の重み付き平均値 (average) に収束 (convergence) することがわかる。このように初期値の重み付き平均値に収束する consensus のことを文献 [2] では weighted-average consensus と呼んでいる。これより式 (13) 形式の consensus 問題と式 (30) 形式の consensus 問題では安定性に違いはなく, collective decision が違うことがわかる。

## 4 シミュレーション (simulation)

いままで説明してきた consensus 問題のシミュレーション (simulation) を Simulink で行った。

### 4.1 問題設定

いま以下のようなダイナミクス (Dynamics) を持つ 5 台の agent がいる状況を考える。

$$\dot{x}_i = u_i \quad (46)$$

また, 今回はグラフ (Graph) が 3 種類の場合についてシミュレーション (simulation) を行った。グラフの形を Fig.11 に示す。

グラフ 1 と 2 の違いは連結の強さであり, グラフ 2 の方が agent の連結が弱い。またグラフ 3 は右下にどのグラフともつながっていない孤立点が存在しているのでグラフ 3 は連結ではない。

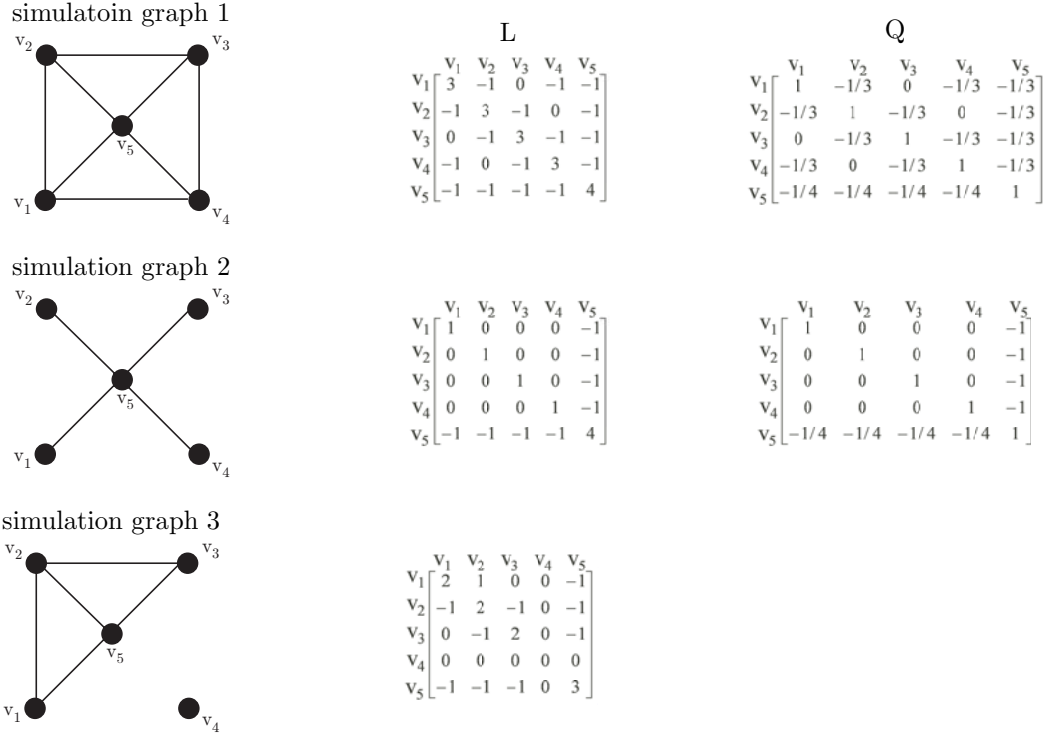


Fig. 11: simulation graph

また, 各 agent の初期状態 (initial state) を以下のように設定した

$$x_1(0) = 9.5 \quad x_2(0) = 5.25 \quad x_3(0) = -20 \quad x_4(0) = 3 \quad x_5(0) = 2.25 \quad (47)$$

各 agent の初期状態の平均値  $Ave(x(0))$  を計算してみると

$$\begin{aligned} Ave(x(0)) &= \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0) + x_5(0)}{5} \\ &= \frac{9.5 + 5.25 - 20 + 3 + 2.25}{5} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

となる. つまり, 式 (13) の閉ループ系では全ての状態が 0 に収束することが予想される. またグラフ 1 とグラフ 2 の場合, 各 agent の初期状態の重み付き平均値  $WAve(x(0))$  は

グラフ 1

$$\begin{aligned} WAve(x(0)) &= \frac{d_1 x_1(0) + d_2 x_2(0) + d_3 x_3(0) + d_4 x_4(0) + d_5 x_5(0)}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \\ &= \frac{3 \times 9.5 + 3 \times 5.25 + 3 \times (-20) + 3 \times 3 + 4 \times 2.25}{3 + 3 + 3 + 3 + 4} \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

グラフ 2

$$\begin{aligned} WAve(x(0)) &= \frac{d_1 x_1(0) + d_2 x_2(0) + d_3 x_3(0) + d_4 x_4(0) + d_5 x_5(0)}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \\ &= \frac{1 \times 9.5 + 1 \times 5.25 + 1 \times (-20) + 1 \times 3 + 4 \times 2.25}{1 + 1 + 1 + 1 + 4} \\ &= 0.84 \end{aligned} \quad (49)$$

これより、式 (30) の閉ループ系ではグラフ 1 の場合は全ての状態が 0.14, グラフ 2 の場合は全ての状態が 0.84 に収束 (convergence) する。つまり、式 (30) の閉ループ系 (close system) ではグラフの形によって、収束値が異なることがわかる。

今回は式 (13) と式 (30) の閉ループ系を持つ場合のシミュレーションを行った。ただし、グラフ 3 については次数 (degree) が 0 のノード (node) が存在するので式 (30) の場合のシミュレーションを行わなかった。Fig.12 に Simulink のブロック線図 (block diagram), 13 にシミュレーションの結果 (result) を示す。

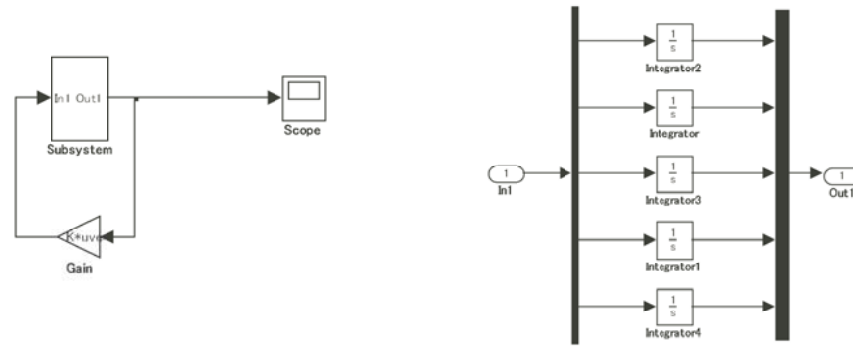
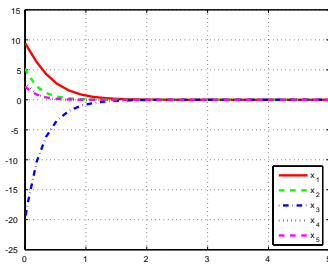
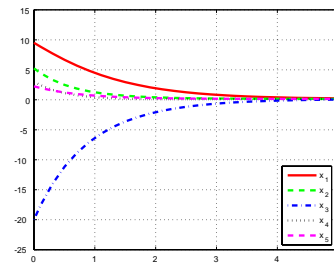


Fig. 12: simulation model

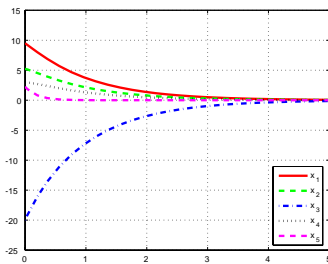
average consensus(simulation graph 1)



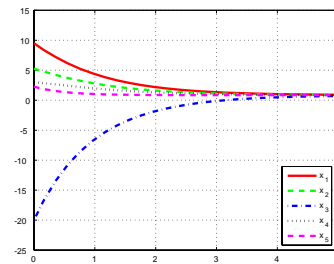
weighted-average consensus(simulation graph 1)



average consensus(simulation graph 2)



weighted-average consensus(simulation graph 3)



average consensus(simulation graph 3)

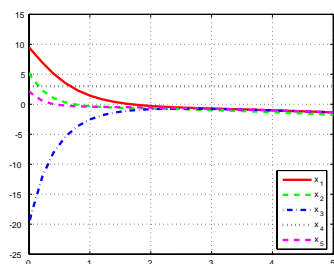


Fig. 13: simulatoin result

まず average consensus の場合から考察してみる. average consensus の場合はグラフ 1 の場合も, グラフ 2 の場合もともに全ての状態が一致し, 0 に収束していることがわかる. つまり, average consensus ではグラフが連結であれば各 agent が収束する値はグラフの形によらないことがわかる. しかし, グラフ 1 とグラフ 2 では収束する速さに違いが見られる. Fig.11 を見てみるとグラフ 2 の方が連結度が弱いことがわかる. average consensus ではグラフの連結度が弱いほうが収束性が悪いことが予想される. 一般に consensus 問題の収束性はグラフラプラジアン の 2 番目に小さい固有値がかかっていることが知られている [2]. しかしここではグラフラプラジアン の固有値と consensus 問題の収束性については省略する. グラフ 3 の場合を見てみると全ての agent が一定の値には収束していないことがわかる. これよりグラフが連結でなければ全ての agent の状態が一定値には収束しないことがわかる.

次に weighted-average consensus の場合について考察してみる. グラフ 1 の場合もグラフ 2 の場合も average consensus とは収束値が異なることが見られる. また, グラフ 1 とグラフ 2 の収束値が異なることも見て取れる. しかし, weighted-average consensus の場合はグラフ 1 とグラフ 2 では収束性についてはそれほど大きな違いは見られない.

## 5 終わりに

本レポートはグラフ理論の基本的な事項を述べ, 文献 [2] に基づき, 基本的な consensus 問題の安定性と collective decision について述べた. そしてシミュレーション (simulation) で実際に consensus が達成されることを確認した. またグラフの形によって収束性が異なることをシミュレーション (simulation) 上において示した.

## 参考文献

- [1] Wei Ren, Randal W.Beard and Ella M. Atkins, “A Survey of Consensus Problems in Multi-agent Coordination,” *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, pp. 1859-1864, 2005.
- [2] Reza Olfati-Saber, J. Alex Fax and Richard M. Murray, “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems,” *Proceeding of IEEE*, 2006 (*Invited Paper, under review*)
- [3] Nima Moshtagh, Ali Jadbabaie and Kostas Daniilidis, “Vision-based distributed Coordination and Flocking of Multi-agent Systems,” *Robotics: Science and Systems* pp. 41-48. MIT Press, 2005.
- [4] Reza Olfati Saber and Richard M. Murray, “Consensus Protocols for Networks of Dyanamic Agents,” *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pp. 951-956, 2003.
- [5] J. Alexander Fax and Ricahrd M. Murray, “Information Folw and Cooperative Control of Vehicle Formations,” *IEEE Trans. on Automatic control*, Vol. 49, No. 9, pp. 1465-1476, 2004.
- [6] HASSAN K. KHALIL, *Nonlinear Systems Third Edition*, Prentice Hall, 2002

- [7] 加納幹雄, 『情報科学のためのグラフ理論』朝倉書店 2001
- [8] 竹中淑子 『線形代数的グラフ理論』培風館 1989
- [9] 浦川肇 『ラプラス作用素とネットワーク』裳華房 1996
- [10] 児玉, 須田, 『システム制御のためのマトリクス理論』コロナ社 1978