Eye-in-Hand 構造のビジュアルフィードバックシステムに対する安定化モデル予測制御

藤田研究室　　　村尾 俊幸

平成 18 年 1 月 30 日

1　はじめに

本稿では Eye-in-Hand 構造のビジュアルフィードバックシステムに対する安定化モデル予測制御に対して述べる．文献 [1] において我々は 逆最適性を意識した Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステムに対するモデル予測制御を提案した. 今回は逆最適性にこだわらずに, 従来研究を含むような Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステムに対するモデル予測制御を提案する.

2　Eye-in-Hand 構造のビジュアルフィードバックシステム

Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバック偏差システムは以下のように表される [2].

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ V_{ec}^b \\ V_{ee}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M(q)^{-1}(C(q,\dot{q})\xi - J_b^T(q)\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})}^T e_c) \\ -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}_{co}^{-1})} J_b(q)\xi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(q)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}_{co}^{-1})} & I \\ 0 & 0 & -\mathrm{Ad}_{(g_{ee}^{-1})} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} M(q)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} w \tag{1}$$

ここでそれぞれ

$$u := \begin{bmatrix} u_\xi \\ u_d + \mathrm{Ad}_{(g_d)} V_d^b \\ u_e \end{bmatrix},\ w := \begin{bmatrix} \tau_d \\ V_{wo}^b \end{bmatrix},\ x := \begin{bmatrix} \xi \\ e_c \\ e_e \end{bmatrix} \tag{2}$$

である．

この動的視覚フィードバック偏差システムに対して, 以下の補題が成り立つ.

補題 2.1 観測対象が運動しておらず, 外乱入力トルクがない (すなわち $w = 0$) とする．このとき, 出力を

$$\nu = Nx \tag{3}$$

$$N := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})}^T & 0 \\ 0 & \mathrm{Ad}_{(e^{-\hat{\xi}\theta_{ec}})} & -I \end{bmatrix},\ x := \begin{bmatrix} \xi \\ e_c \\ e_e \end{bmatrix}$$

とするとき, 動的視覚フィードバックシステム (1) の入出力間に

$$\int_0^T u^T \nu d\tau \geq -\beta_0,\ {}^\forall T > 0 \tag{4}$$

が成り立つ．ただし β_0 はある非負の定数である．

この補題は次のエネルギー関数を用いることにより導出することができる.

$$V(x) = \frac{1}{2}\xi^T M(q)\xi + E(g_{ec}) + E(g_{ee}) \tag{5}$$

ここで

$$E(g) := \frac{1}{2}\|p\|^2 + \phi(e^{\hat{\xi}\theta}) \tag{6}$$

$$\phi(e^{\hat{\xi}\theta}) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I - e^{\hat{\xi}\theta}) \tag{7}$$

であり, 解軌道に沿った時間微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T N^T u \\ &= \nu^T u \end{aligned} \tag{8}$$

が成立するからである. 詳しい計算は文献 [2] 参照.

受動性に基づき次の制御則を提案する.

$$u = -K\nu = -KNx \tag{9}$$

$$K := \begin{bmatrix} K_\xi & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 \\ 0 & 0 & K_e \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$K_\xi := \mathrm{diag}\{k_{\xi 1}, \cdots, k_{\xi n}\} \tag{11}$$

$$K_c := \mathrm{diag}\{k_{c1}, \cdots, k_{c6}\} \tag{12}$$

$$K_e := \mathrm{diag}\{k_{e1}, \cdots, k_{e6}\} \tag{13}$$

(5) 式のエネルギー関数をリアプノフ関数候補とすると, $w = 0$ のとき, (1) 式の解軌道に沿った時間微分は,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= u^T \nu \\ &= -\nu^T K \nu \\ &= -x^T N^T K N x \end{aligned} \tag{14}$$

と導かれる. ゲイン K_ξ, K_c, K_e の正定性より行列 K が正定であり, N が正則であるため, システムの平衡点 $x = 0$ は漸近安定となる.

3 安定化モデル予測制御

本節では前節で示した Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステムに対して安定化モデル予測制御を考える.

3.1 Control Lyapunov Function

まずはじめに, 安定化の基礎となる Control Lyapunov 関数を定義する.

定義 3.1 微分可能で正定で $\|x\| \to \infty$ のときに $V(x) \to \infty$ となる関数 $V(x)$ を Control Lyapunov 関数と呼ぶ [3].

$$x \neq 0 \text{ のとき } \inf_u [\dot{V}] < 0 \tag{15}$$

この Control Lyapunov 関数について次の定理を提案する.

定理 3.1 外乱がない ($w = 0$) とする. このとき Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステム (1) に対する (5) 式のエネルギー関数は Control Lyapunov 関数である.

証明：(8) 式より, (1) 式の解軌道に沿った V の時間微分は

$$\inf_u[\dot{V}] = \inf_u[x^T N^T u] < 0 \tag{16}$$

となる．したがって (5) 式のエネルギー関数は Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステム (1) に対する Control Lyapunov 関数である． □

3.2 Control Lyapunov Function(逆最適制御に基づくモデル予測制御)

ここで従来研究と比較するために, ACC2006 に投稿した文献 [1] についても並行して述べることとする．文献 [1] では以下のように Control Lyapunov Function を定義した．

定義 3.2 $l(x,u)$ を正定な関数とし, 微分可能な正定関数 $V(x)$ が以下の条件式を満たすとき, $V(x)$ は Control Lyapunov 関数である．

$$\inf_u[\dot{V} + l(x,u)] \le 0 \tag{17}$$

(17) 式のほうが (15) 式よりもより厳しい条件となっている．

この Control Lyapunov 関数について次の定理を提案する．

定理 3.2 次の正定関数を定義する．

$$l(x,u) := x^T N^T K N x + \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \tag{18}$$

このとき, Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステム (1) に対するエネルギー関数 (5) 式は Control Lyapunov 関数とみなせる．

証明は省略する．

3.3 安定化モデル予測制御

本節では安定化モデル予測制御について述べる．システム (1) に対し, ある時刻 t において, つぎの評価関数を最小化する有限区間最適制御問題を考える．

$$J(u,t) = \int_t^{t+T} l(x(\tau), u(\tau)) d\tau + V(x(t+T)) \tag{19}$$

ここで求められた入力が, 初めのサンプリング周期だけ系に加えられる．次のサンプリング周期には, 次の時刻を t とした最適制御問題を解いて得られる入力を適用する．これを繰り返すことで得られる閉ループ系の入力がモデル予測制御の制御入力となる [4].

この問題に対して次の定理が成り立つ．

定理 3.3 Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステム (1) に対してつぎの評価関数を考える．

$$J(u,t) = \int_t^{t+T} l(x(\tau), u(\tau)) d\tau + \rho V(x(t+T)) \tag{20}$$

$$l(x,u) = x^T Q x + u^T R u,\ Q \ge 0,\ R > 0 \tag{21}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \xi^T M(q) \xi + E(g_{ec}) + E(g_{ee}) \tag{22}$$

観測対象が運動しておらず, 外乱入力トルクがない (すなわち $w = 0$) なら, 動的視覚フィードバックシステム (1) と評価関数 (20) に基づいて生成されるモデル予測制御則, ならびに安定化制御則

$$u_k = -\alpha K N x \tag{23}$$

で構成される閉ループ系の平衡点 $x = 0$ は漸近安定である．

証明：区間 $[t+\delta, t+T+\delta]$ での準最適な入力として次式を考える．

$$\tilde{u} = \begin{cases} u^*(\tau) & \tau \in [t+\delta, t+T] \\ u_k(\tau) & \tau \in [t+T, t+T+\delta] \end{cases} \tag{24}$$

区間 $[t+T, t+T+\delta]$ での入力 u_k は (1) のシステムを安定化する制御則である．(24) 式の入力を用いると, 評価関数の最小値は

$$\begin{aligned} J(x^*(t+\delta), \tilde{u}) &= \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau + \rho V(x^*(t+T)) - \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau - \rho V(x^*(t+T)) \\ &\quad + \int_{t+T}^{t+T+\delta} l(x^*(\tau+T), u_k)d\tau + \rho V(\phi(x^*(t+T), u_k)) \\ &= J^*(x(t)) + \rho[V(x(t+T+\delta)) - V(x^*(t+T))] \\ &\quad - \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau + \int_{t+T}^{t+T+\delta} l(x^*(\tau+T), u_k)d\tau \\ &\qquad \left(\because\ J^*(x(t)) = \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau + \rho V(x^*(t+T)),\ x(t+T+\delta) := \phi(x^*(t+T), u_k) \right) \end{aligned} \tag{25}$$

ここで ϕ はシステムに入力 u_k を加えたときの状態とする．さらに $J^*(x(t+T)) \leq J(x^*(t+T), \tilde{u})$ より,

$$\begin{aligned} J^*(x(t+T)) &\leq J^*(x(t)) + \rho[V(x(t+T+\delta)) - V(x^*(t+T))] \\ &\quad - \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau + \int_{t+T}^{t+T+\delta} l(x^*(\tau+T), u_k)d\tau \\ J^*(x(t+T)) - J^*(x(t)) &\leq \rho[V(x(t+T+\delta)) - V(x^*(t+T))] \\ &\quad - \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau + \int_{t+T}^{t+T+\delta} l(x^*(\tau+T), u_k)d\tau \end{aligned} \tag{26}$$

が導かれる．さらに上式の両辺を δ でわり, $\delta \to 0$ とすることで

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{J^*(x(t+T)) - J^*(x(t))}{\delta} = \dot{J}^*(t) \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \frac{\rho[V(x(t+T+\delta)) - V(x^*(t+T))]}{\delta} &= \rho \dot{V}(x^*(t+T)) \\ &= -\rho\alpha x^{*T}(t+T) N^T K N x^*(t+T) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_t^{t+T} l(x^*(\tau), u^*)d\tau &= l(x^*(\tau), u^*) \\ &= x^{*T}(t) Q x^*(t) + u^{*T} R u^* \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{t+T}^{t+T+\delta} l(x^*(\tau+T), u_k)d\tau &= x^{*T}(t+T) Q x^*(t+T) + u_k^T R u_k \\ &= x^{*T}(t+T) Q x^*(t+T) + \alpha^2 x^{*T}(t+T) N^T K^T R K N x^*(t+T) \end{aligned} \tag{30}$$

となることから, 以下の式が成立する．

$$\begin{aligned} \dot{J}^*(t) &\leq -\rho\alpha x^{*T}(t+T) N^T K N x^*(t+T) - x^{*T}(t) Q x^*(t) - u^{*T} R u^* \\ &\quad + x^{*T}(t+T) Q x^*(t+T) + \alpha^2 x^{*T}(t+T) N^T K^T R K N x^*(t+T) \\ &= -x^{*T}(t+T)(\rho\alpha N^T K N - Q - \alpha^2 N^T K^T R K N) x^*(t+T) - x^{*T}(t) Q x^*(t) - u^{*T} R u^* \\ &= -x^{*T}(t+T) P x^*(t+T) - x^{*T}(t) Q x^*(t) - u^{*T} R u^* \end{aligned} \tag{31}$$

ただし,

$$P := \rho\alpha N^T K N - Q - \alpha^2 N^T K^T R K N \tag{32}$$

である．$\rho > 0$ を大きくとったとき, 行列 P が正定行列となることから,

$$\dot{J}^*(t) < 0 \tag{33}$$

が成立する．以上より $\dot{J}^*(t)$ を Lyapunov 関数とみなすことで, 閉ループ系の平衡点の漸近安定性が示される．□

3.4 安定化モデル予測制御 (逆最適制御に基づくモデル予測制御)

文献 [1] では安定化モデル予測制御に対して以下のような定理を提案した.

定理 3.4 Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステム (1) に対してつぎの評価関数を考える.

$$J(u,t) = \int_t^{t+T} l(x(\tau),u(\tau))d\tau + V(x(t+T)) \tag{34}$$

$$l(x,u) = x^T N^T K N x + \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \tag{35}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\xi^T M(q)\xi + E(g_{ec}) + E(g_{ee}) \tag{36}$$

観測対象が運動しておらず, 外乱入力トルクがない (すなわち $w=0$) なら, 動的視覚フィードバックシステム (1) と評価関数 (34) に基づいて生成されるモデル予測制御則, ならびに安定化制御則

$$u_k = -2KNx \tag{37}$$

で構成される閉ループ系の平衡点 $x=0$ は漸近安定である.

証明は付録に示す.

定理 3.3 と定理 3.4 を比較すると, 定理 3.3 の $l(x,u)$ は Q と R は自由に決めることができるのに対して定理 3.3 の $l(x,u)$ は $Q=N^TKN$, $R=\frac{1}{4}K^{-1}$ という決まりきった評価関数となってしまっている. また定理 3.4 の場合では安定化できるモデル予測制御則は $u=-2KNx$ のみであったが, 定理 3.3 の場合ではそのようなことはない.

3.5 P の解析

モデル予測制御の安定性は (32) 式の P が準正定になればよかった. 本節では各パラメータと P の正定性について簡単にだが議論したい.

ここで, 以下のように評価関数をおく.

1. $Q = N^T Q' N$ とおく.
   つまり

   $$l(x,u) = x^T N^T Q' N x + u^T R u \tag{38}$$

   とする.

   $$\begin{aligned} P &= \rho\alpha N^T K N - N^T Q' N - \alpha^2 N^T K^T R K N \\ &= N^T(\rho\alpha K - Q' - \alpha^2 K^T R K)N \end{aligned} \tag{39}$$

   となることから,

   $$\begin{aligned} \rho\alpha K - Q' - \alpha^2 K^T R K &\geq 0 \\ \rho K &\geq \frac{1}{\alpha}Q' - \alpha K R K \\ \rho &\geq \frac{1}{\alpha}Q' K^{-1} - \alpha K R \end{aligned} \tag{40}$$

   となるように ρ を決めればよい.

2. $Q' = qK$ $(Q = qN^T K N)$, $R = rK^{-1}$ とおく.
   つまり

   $$l(x,u) = q x^T N^T K N x + r u^T K^{-1} u \tag{41}$$

とする.

$$
\begin{aligned}
P &= \rho\alpha N^T KN - qN^T KN - \alpha^2 r N^T K^T K^{-1} KN \\
&= N^T(\rho\alpha - q - \alpha^2 r)KN
\end{aligned}
\tag{42}
$$

となり, $K > 0$ であることから,

$$
\begin{aligned}
\rho\alpha - q - \alpha^2 r &\geq 0 \\
\rho &\geq \frac{1}{\alpha}q + \alpha r \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{\alpha}q\alpha r} \quad \left(\text{等号成立は}\frac{1}{\alpha}q = \alpha r\text{ のとき, つまり }q = \alpha^2 r\right) \\
&= 2\sqrt{qr}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

となるように ρ を決めればよい. つまり $\rho = 2\sqrt{qr}$ となるように ρ を決めれば最も終端重みを小さくできる.

ちなみに定理 3.4 のときは

$$
\alpha = 2,\ q = 1,\ r = \frac{1}{4},\ \rho = 1 = 2\sqrt{qr} \tag{44}
$$

であった.

3.6 拘束条件について

拘束条件についても軽く触れておく [5][6].

いま入力と状態に関して以下のような制約が課せられているとする.

$$
u \in \mathcal{U} \tag{45}
$$

$$
x \in \mathcal{X} \tag{46}
$$

$$
\tag{47}
$$

ここで, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{X}$ はそれぞれ入力と状態に関する制約条件を規定する集合である. また終端制約を

$$
x(t+T) \in X_f \subset \mathcal{X} \tag{48}
$$

と表現する. ここで X_f は終端制約集合と呼ばれる集合である. この終端制約集合は (5) 式のエネルギー関数 V のレベル集合を用いてつぎのように定義する.

$$
X_f = \{x | \rho V(x) \leq r\} \tag{49}
$$

この r は以下の不等式を計算することで求める.

$$
\max_{x \in X_f} \{\rho V(\phi(x, u_k)) - \rho V(x) + x^T(Q + \alpha^2 N^T K^T RKN)x\} < 0 \tag{50}
$$

ここで Eye-in-Hand 構造の 3 次元動的視覚フィードバックシステム (1) に対するモデル予測制御に対して以下の仮定が成立するとする.

A1: $X_f \subset \mathcal{X}$, X_f は閉集合, $0 \in X_f$

A2: $u_k \in \mathcal{U}$, $\forall x \in X_f$

A3: $\phi(x, u_k) \in X_f$, $\forall x \in X_f$

このとき, 定理 3.3 は拘束条件を満たした安定化モデル予測制御となる.

4　おわりに

本稿では Eye-in-Hand 構造のビジュアルフィードバックシステムに対する安定化モデル予測制御に対して述べた．今後は, 拘束条件などまだまだあいまいなところが多いのでそれらをより理解していくことと, SICE-DD アームを用いた検証実験を早急に取り組んでいきたい.

A　定理 3.4 の証明

証明：まずはじめに次の計算を試みる.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T N^T u \quad (\because (8)\ 式) \\ &= x^T N^T u + x^T N^T K N x + \frac{1}{4} u^T K^{-1} u - x^T N^T K N x - \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \\ &= \frac{1}{4} u^T K^{-1} u + \frac{1}{2} u^T K^{-1} K N x + \frac{1}{2} x^T N^T K K^{-1} u + x^T N^T K K^{-1} K N x - x^T N^T K N x - \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \\ &= \left(\frac{1}{2} u + K N x\right)^T K^{-1} \left(\frac{1}{2} u + K N x\right) - x^T N^T K N x - \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \\ &= \left\| \frac{1}{2} u + K N x \right\|_{K^{-1}}^2 - x^T N^T K N x - \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \end{aligned} \tag{51}$$

(51) 式を用いることにより, (34) 式の評価関数はつぎのように計算される.

$$\begin{aligned} J_{RHC}(u,t) &= \int_t^{t+T} l(x(\tau), u(\tau)) d\tau + V(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} \left(x^T N^T K N x + \frac{1}{4} u^T K^{-1} u \right) d\tau + V(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} \left(\left\| \frac{1}{2} u + K N x \right\|_{K^{-1}}^2 - \dot{V} \right) d\tau + V(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} \left(\left\| \frac{1}{2} u + K N x \right\|_{K^{-1}}^2 \right) d\tau - V(x(t+T)) + V(x(t)) + V(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} \left\| \frac{1}{2} u + K N x \right\|_{K^{-1}}^2 d\tau + V(x(t)) \end{aligned} \tag{52}$$

したがって, 評価関数を最小化する制御則は

$$u_{RHC} = -2KNx \tag{53}$$

であり, その最適値は

$$\begin{aligned} J_{RHC}^* &= J_{RHC}(u_{RHC}, t) \\ &= V(x(t) \end{aligned} \tag{54}$$

となる．ここで, $J_{RHC}^*(t)$ をリアプノフ関数候補として, Eye-in-Hand 構造の動的視覚フィードバックシステム (1) の解軌道に沿って時間微分をおこなうと,

$$\begin{aligned} \dot{J}_{RHC}^* &= \dot{V} \\ &= -2x^T N^T K N x < 0. \end{aligned} \tag{55}$$

となる．したがって, Eye-in-Hand 構造の動的視覚フィードバックシステム (1) と評価関数 (34) に基づいて生成されるモデル予測制御則で構成される閉ループ系の平衡点 $x = 0$ は漸近安定である. □

参考文献

[1] M. Fujita, T. Murao and Y. Nakaso, “Stabilizing Receding Horizon Control for Three Dimensional Visual Feedback System with Eye-in-Hand Configuration,” *Proc. of the 2006 American Control Conference*, 2006(rejected).

[2] M. Fujita, H. Kawai and M. W. Spong, "Passivity-based Dynamic Visual Feedback Control for Three Dimensional Target Tracking: Stability and L_2-gain Performance Analysis," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005(submitted).

[3] 宮里, "逆最適性に基づく非線形 H_∞ 制御," 計測と制御, Vol. 39, No. 2, pp. 112–118.

[4] A. Jadbabie, J. Yu and J. Hauser, "Unconstrained Receding-Horizon Control of Nonlinear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 46, No. 5, pp. 776–783, 2001.

[5] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao and P. O. M. Scokaert, "Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality," *Automatica*, Vol. 36, No. 7, pp. 789–814, 2000.

[6] J. B. Rawlings, "Tutorial Overview of Model Predictive Control," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 20, No. 3, pp. 38–52, 2000.