

逆最適制御からの安定化モデル予測制御の考察

藤田研究室 見本 真一郎

平成 17 年 11 月 30 日

1 はじめに

逆最適制御からの安定化モデル予測制御について考える。まずは、逆最適制御からモデル予測制御に用いる評価関数を求める。次に、その評価関数を用いることの問題点を挙げる。最後に、受動性に基づいたモデル予測制御を提案する。

2 誤差システム

以下の誤差システムについて考える [1].

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\Lambda & I \\ E(q, \dot{q})\Lambda & -E(q, \dot{q}) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix} u \quad (1)$$

ここで

$$x = \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} + \Lambda e \end{bmatrix} \\ E(q, \dot{q}) = M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) - \Lambda \quad (2)$$

である。 Λ は正定行列である。

3 受動性に基づく制御 (Pa)

文献 [2] より、システム (1) に対して、以下のフィードバック制御則が得られている。ここで、 $K_e \in R^2$ は任意の正定行列である。

$$u = -Rs \\ R = M(q)\Lambda + \frac{1}{4}(C(q, \dot{q})\Lambda - M(q)\Lambda^2 + K_e)(K_e\Lambda)^{-1}(C(q, \dot{q})\Lambda - M(q)\Lambda^2 + K_e)^T + K \quad (3)$$

この制御則を適用することで、文献 [1] で得られている、システム (1) のエネルギー関数

$$V_{Pa} = \frac{1}{2}s^T M(q)s + \frac{1}{2}e^T K_e e \quad (4)$$

に対して、

$$\dot{V}_{Pa} = -x^T Q x < 0 \\ Q = \begin{bmatrix} K_e\Lambda & -\frac{1}{2}(C(q, \dot{q})\Lambda - M(q)\Lambda^2 + K_e)^T \\ -\frac{1}{2}(C(q, \dot{q})\Lambda - M(q)\Lambda^2 + K_e) & -M(q)\Lambda + R \end{bmatrix} > 0$$

が成り立ち、リアプノフの安定定理よりシステム (1) の $x = 0$ に対して漸近安定性が保証されている。

4 逆最適制御 (IO)

さらに文献 [2] に次のような制御則が得られている.

$$u = -2Rs \quad (5)$$

この制御則は次式の評価関数 $J_{IO}(x(t), u(t))$ を最小にし, かつ漸近安定性を保証していることが証明されている.

$$\begin{aligned} J_{IO}(x(t), u(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t l(x, u) d\tau + 4V_{Pa}(x(t+T)) \right] \\ l_{IO}(x, u) &= 4x^T Qx + u^T R^{-1}u \end{aligned} \quad (6)$$

5 モデル予測制御 (MPC)

5.1 モデル予測制御

システム (1) に対して, モデル予測制御を適用する. モデル予測制御とは, 各 δ 秒ごとに式 (7) に示す評価関数 $J_{MPC}(x(t), u(t))$ を最小にする最適制御入力を求める.

$$J_{MPC}(x(t), u(t)) = \int_t^{t+T} l_{MPC}(x(\tau), u(\tau)) d\tau + V_{MPC}(x(t+T)) \quad (7)$$

ここで, t は現在時刻, T は予測ホライズン, $l_{MPC}(x, u)$ は性能指標を表す正定関数, $V_{MPC}(x(t+T))$ は終端コスト関数を表している. ただし, x はシステムの状態を表すため, 問題設定に依存する. 初期状態 $x(t)$ を用いて得られた最適な制御入力 $u^*(t)$ が δ 秒間システムに入力され, 次の時刻 $t+\delta$ では状態 $x^*(t+\delta)$ が得られる. これを初期状態として得られる最適な制御入力 $u^*(t+\delta)$ を入力するというように, これらを繰り返すことにより制御をおこなう.

5.2 モデル予測制御の安定性

モデル予測制御に対して文献 [3] より,

$$\inf_u [l_{MPC}(x, u) + \dot{V}_{MPC}(x)] \leq 0 \quad (8)$$

が成り立つならば, システムの平衡点が漸近安定になることが証明されている.

ここで

$$\begin{aligned} l_{MPC} &= l_{IO} \\ V_{MPC} &= 4V_{Pa} \end{aligned} \quad (9)$$

とすると

$$\begin{aligned} l_{MPC} + \dot{V}_{MPC} &= 4x^T Qx + u^T R^{-1}u \\ &\quad - 4x^T \begin{bmatrix} K_e \Lambda & -\frac{1}{2}(C(q, \dot{q})\Lambda - M(q)\Lambda^2 + K_e)^T \\ -\frac{1}{2}(C(q, \dot{q})\Lambda - M(q)\Lambda^2 + K_e) & -M(q)\Lambda \end{bmatrix} x \\ &\quad + 4s^T u \\ &= 4x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} x + 4s^T u + u^T R^{-1}u \\ &= 4s^T R s + 4s^T u + u^T R^{-1}u \\ &= \|u + 2Rs\|_{R^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

したがって

$$u = -2Rs \quad (11)$$

のときに

$$l_{MPC} + \dot{V}_{MPC} = 0 \quad (12)$$

となり、モデル予測制御の安定条件 (8) を満たすことが分かる。

5.3 評価関数を最小にする入力

評価関数 (7) を最小にする入力を求める。

$$\begin{aligned} J_{MPC}(x(t), u(t)) &= \int_t^{t+T} l_{MPC}(x, u) d\tau + V_{MPC}(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} (4x^T Q x + u^T R^{-1} u) d\tau + 4V_{Pa}(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} (-4\dot{V}_{Pa}(x(t)) + \|u + 2Rs\|_{R^{-1}}^2) d\tau + 4V_{Pa}(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} \|u + 2Rs\|_{R^{-1}}^2 d\tau - 4V_{Pa}(x(t+T)) + 4V_{Pa}(x(t)) + 4V_{Pa}(x(t+T)) \\ &= \int_t^{t+T} \|u + 2Rs\|_{R^{-1}}^2 d\tau + 4V_{Pa}(x(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

よって、評価関数 (13) を最小にする u は

$$u = -2Rs \quad (14)$$

と求まる。

したがって、モデル予測制御の安定条件 (8) を満たし、かつ評価関数 (13) を最小にする最適入力 u^* は

$$u^* = -2Rs \quad (15)$$

と求まる。

しかし、ここで下記の問題が生じる。

- モデル予測制御の最適入力 $u^* = -2Rs$ が逆最適制御の最適入力と同じになる。
- モデル予測制御の最適入力 $u^* = -2Rs$ がホライズン T などに依存しない。

この疑問を解くために、シミュレーションを行い、解析する。

5.4 シミュレーションによる比較

前小節の結果、システム (1) に対する安定化モデル予測制御で求まる最適入力が、逆最適制御の最適入力と同じであり、またホライズンなどに依存していないことがわかった。そこでこの小節では、C/GMRES によって求まる最適入力をを用いる場合と、前小節で求めたフィードバックによって求まる最適入力をを用いる場合を、シミュレーションで比較する。ここで言う C/GMRES を用いるとは、SIMULINK の S-Function ブロック用に修正した C/GMRES プログラムを用いることを言う。

Fig. 1, 2, 3, 4 にさまざまな初期角度、目標角度の場合の C/GMRES と $u = -2Rs$ の比較のシミュレーション結果を示す。ここで、実線が C/GMRES、破線が $u = -2Rs$ である。また、0 秒がロボットに入力が入る時間である。パラメータは

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 9.0 \end{bmatrix} \quad K_e = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (16)$$

とし、C/GMRES のホライズン $T = 0.1$ [s]、サンプリング時間は 0.02 [s] とした。

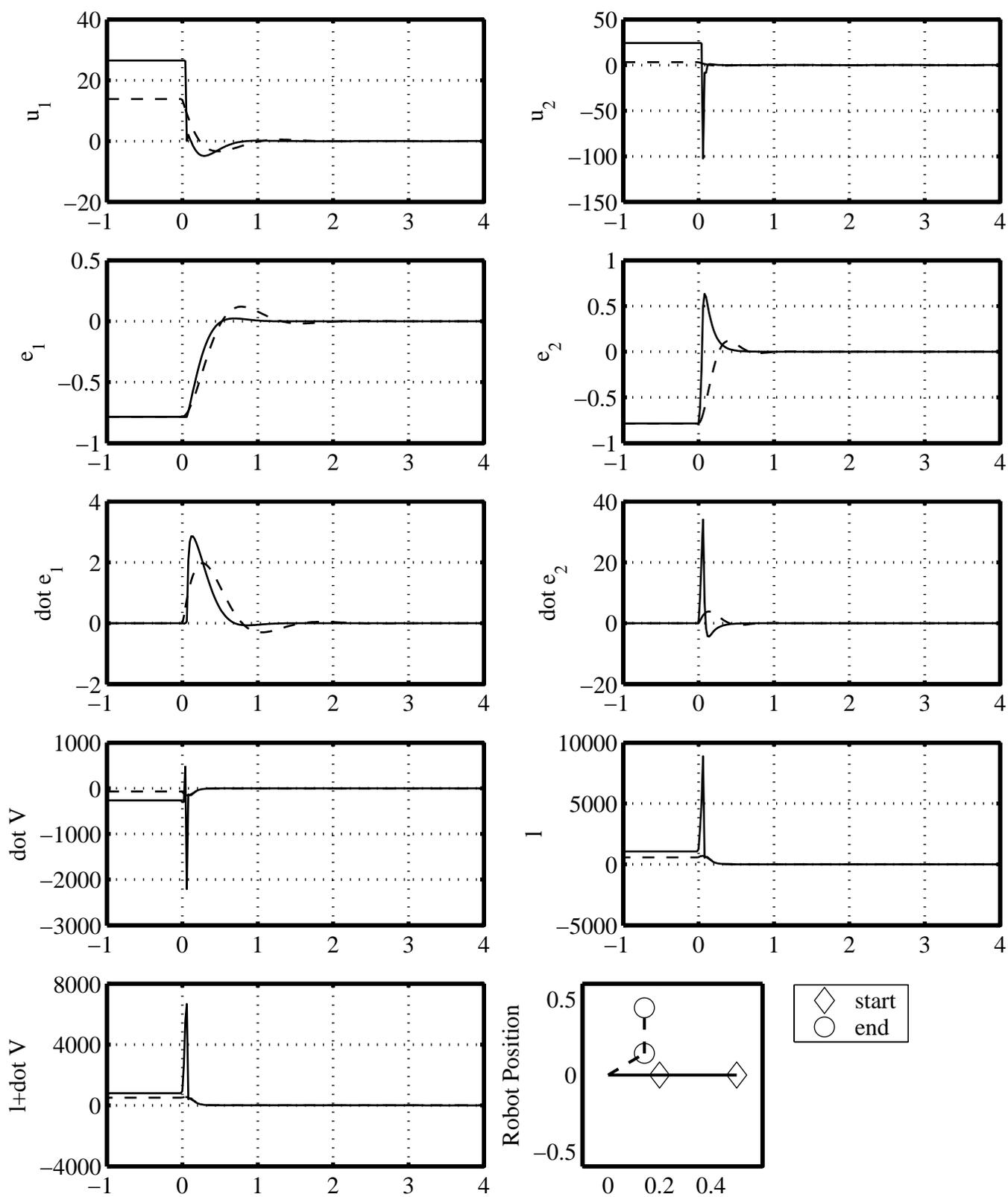


Fig.1: 初期角度 $q = [0 \ 0]$ 目標角度 $q_d = [\pi/4 \ \pi/4]$ の場合 (実線...C/GMRES 破線... $u = -2Rs$)

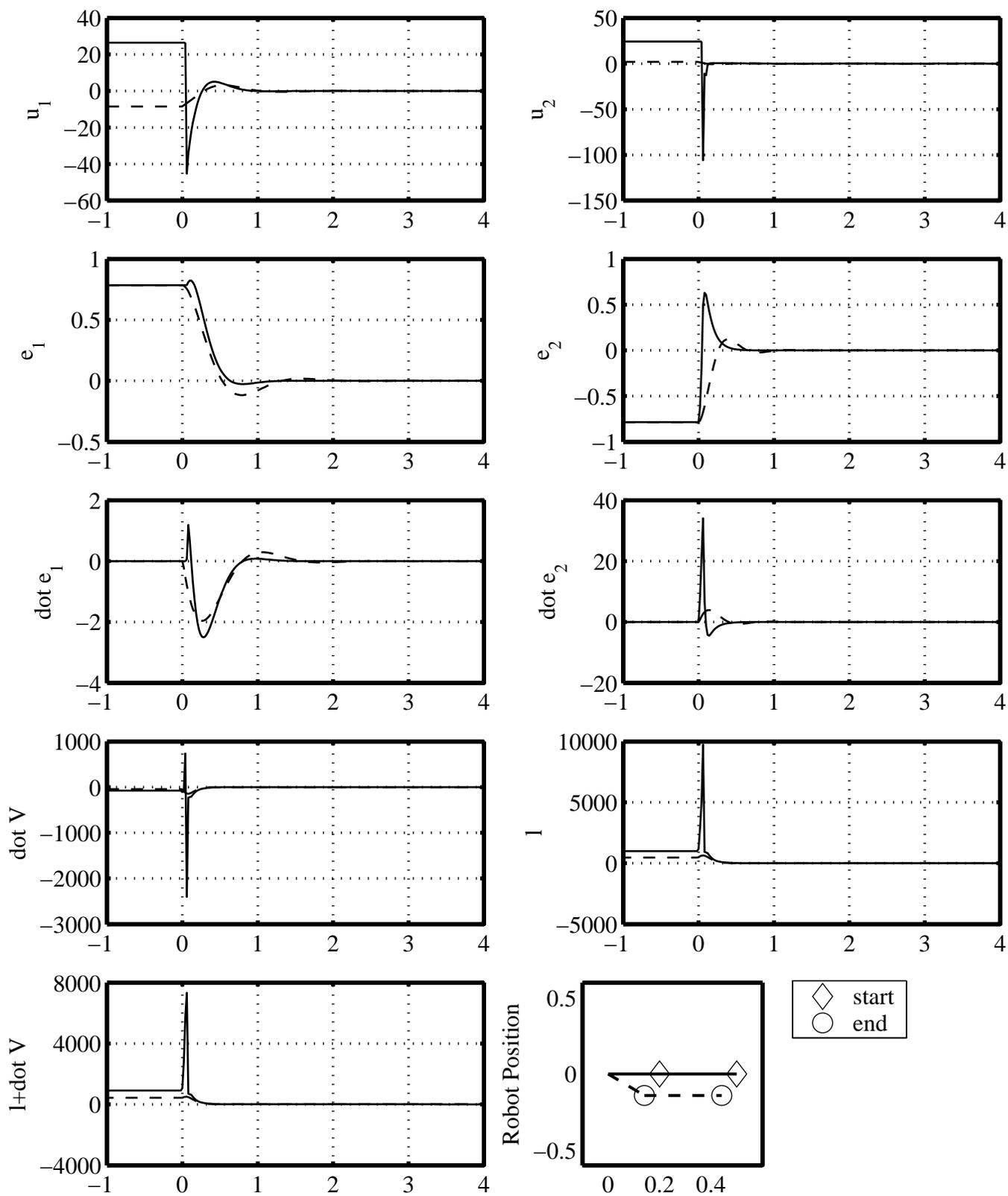


Fig.2: 初期角度 $q = [0 \ 0]$ 目標角度 $q_d = [-\pi/4 \ \pi/4]$ の場合 (実線...C/GMRES 破線... $u = -2Rs$)

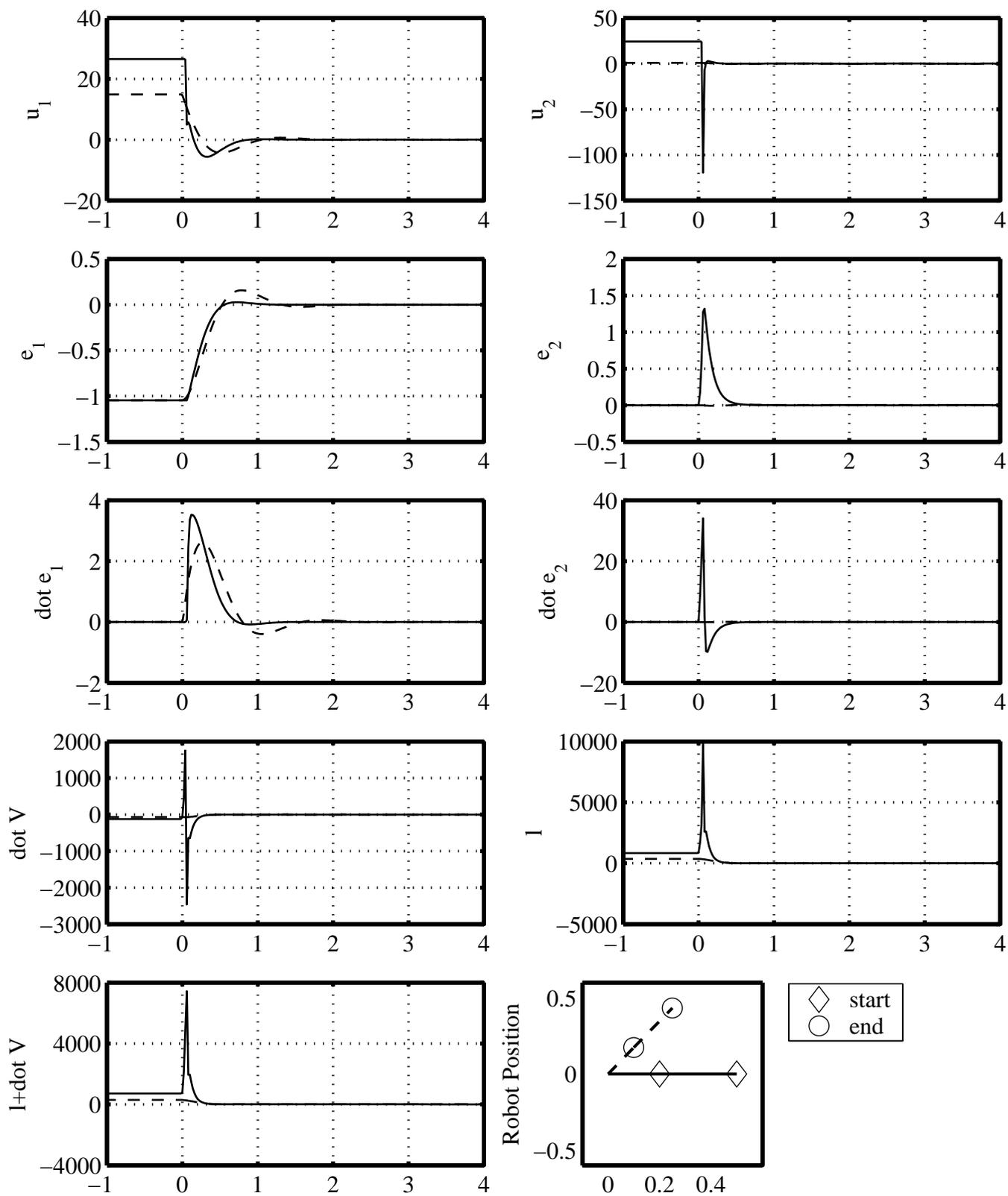


Fig.3: 初期角度 $q = [0 \ 0]$ 目標角度 $q_d = [\pi/3 \ 0]$ の場合 (実線...C/GMRES 破線... $u = -2Rs$)

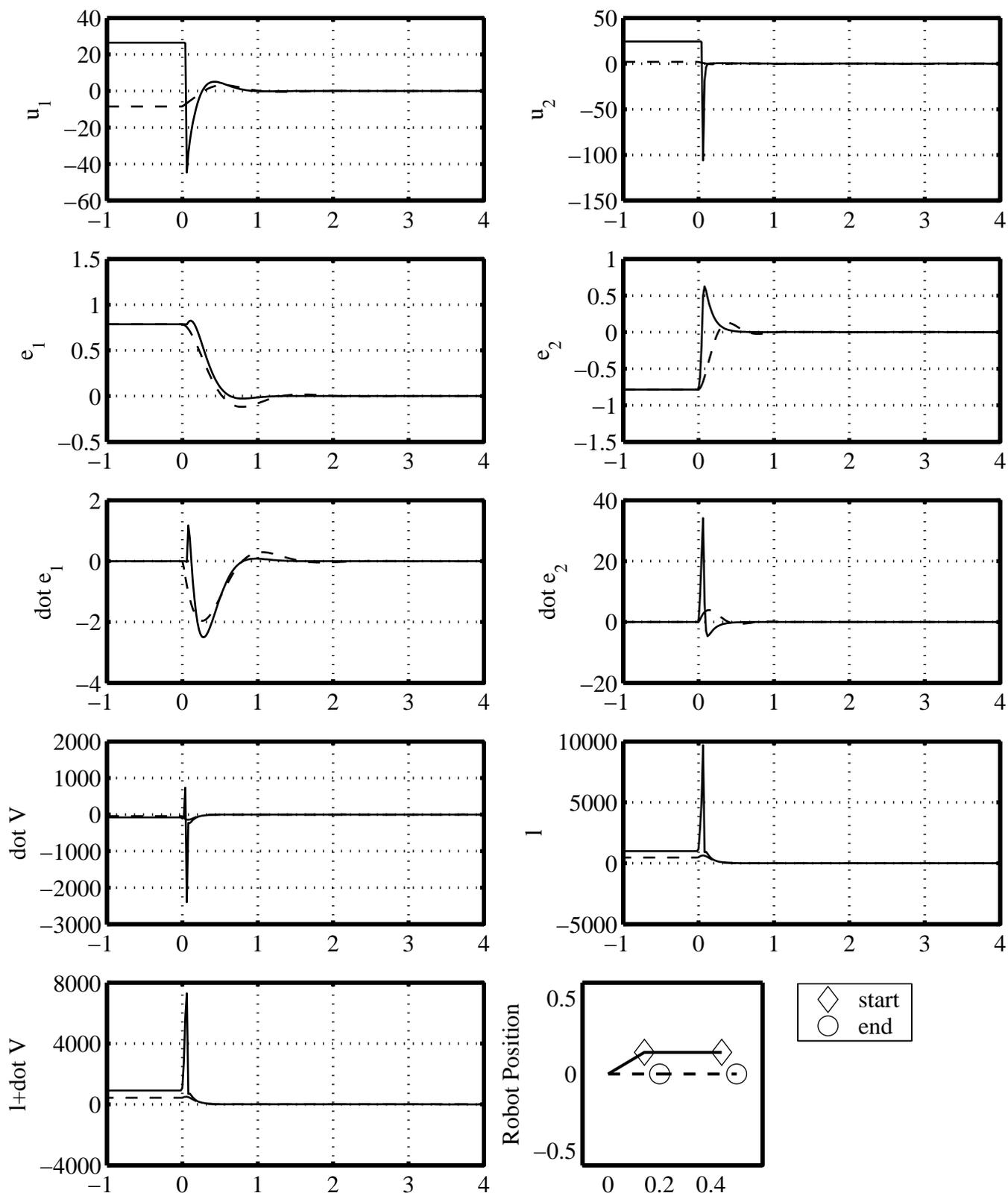


Fig.4: 初期角度 $q = [\pi/4 \ -\pi/4]$ 目標角度 $q_d = [0 \ 0]$ の場合

このシミュレーション結果より、以下のことが言える。

1. $e, \dot{e} \rightarrow 0$ に収束しているため、制御目的は達成している。
2. u_1, u_2 とともに、C/GMRES の最適入力と $u = -2Rs$ が一致しない。
3. C/GMRES の最適入力を用いた場合の $l, \dot{V}, l + \dot{V}$ が急激に変動している。
4. C/GMRES の最適入力を用いた場合も $u = -2Rs$ を用いた場合も、モデル予測制御の安定条件 $l + \dot{V} \leq 0$ を満たしていない。

また、C/GMRES において、ホライズン T を変えて、シミュレーションを行った。結果、 u_1 は変わらず、 u_2 だけに微小な変化が確認できた。しかし、モデル予測制御の直感的な理解とは隔たりがあるので、プログラムなどを確認する必要がある。

6 受動性に基づいたモデル予測制御

6.1 受動性と安定化モデル予測制御

この節では、受動性の性質と制約条件を用いることで、安定化モデル予測制御を行う方法を提案する。まず、受動性の定義を確認する。

状態 $x \in R^n$ 、入力 $u \in R^p$ とした次のシステム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \quad (17)$$

について考える。ここで、 $f: R^n \times R^p \rightarrow R^n$ は局所的にリプシッツであり、 $h: R^n \times R^p \rightarrow R^p$ は連続である。また、 $f(0, 0) = 0, h(0, 0) = 0$ が成り立つ。この入力 u から出力 y のシステム (17) に対して受動性が定義されている [4] (pp. 236)。

$$u^T y \leq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in R^n \times R^p \quad (18)$$

ここで、 V は連続微分可能な正定関数である。

この受動性の性質を利用して安定化モデル予測制御を考える。 $l_{MPC}(x, u)$ を次のようにおく。

$$l_{MPC}(x, u) = -u^T y \quad (19)$$

また、 V をモデル予測制御の終端コスト関数 V_{MPC} とすると、受動性の式 (18) は以下のように書ける。

$$-l_{MPC}(x, u) \leq \dot{V}_{MPC} \quad (20)$$

これは、式 (8) のモデル予測制御の安定性の条件である。よって、上記の $l_{MPC}(x, u), V_{MPC}(x)$ を用いることで、安定化モデル予測制御が出来ると考えられる。しかし、 $l_{MPC}(x, u)$ は正定関数なので、制約条件として

$$l_{MPC}(x, u) = -u^T y > 0 \quad (21)$$

が必要である。

6.2 Example

例として、 n 自由度マニピュレータを考える。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (22)$$

次の入力トルクを与える [3]。

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) - K_e e + u \quad (23)$$

ここで $\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e$ である. このトルク (23) を式 (22) に代入すると

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + K_e e = u \quad (24)$$

と求まる. ここで

$$\begin{aligned} s &= \dot{q} - \dot{q}_r \\ &= \dot{q} - \dot{q}_d + \Lambda e \\ &= \dot{e} + \Lambda e \end{aligned} \quad (25)$$

である. 文献 [1] で用いられているエネルギー関数を $V_{MPC}(x)$ とすると

$$V_{MPC}(x) = \frac{1}{2}s^T M(q)s + \frac{1}{2}e^T K_e e \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{MPC} &= s^T u - e^T K_e \Lambda e \\ &\leq s^T u \end{aligned} \quad (27)$$

したがって, システム (24) は入力 u , 出力 s の間で受動性が成り立っていることがわかる. そこで

$$l_{MPC}(x, u) = -s^T u \quad (28)$$

とおき,

$$J_{MPC}(x(t), u(t)) = \int_t^{t+T} l_{MPC}(x, u) d\tau + V_{MPC}(x(t+T)) \quad (29)$$

を評価関数とし, さらに制約条件を

$$l_{MPC} = -s^T u > 0 \quad (30)$$

とするモデル予測制御を解くことで, 安定化モデル予測制御が出来ると考えられる.

7 おわりに

本稿では, 逆最適制御で求めた評価関数をモデル予測制御に用いた場合の疑問点を挙げた. さらに, 受動性に基づいたモデル予測制御を提案した. 今後の課題は, 本稿で挙げた疑問点の解決と, 提案した制御手法のシミュレーション・実験装置への実装が考えられる.

参考文献

- [1] J. J. Slotine and W. Li, "On the Adaptive Control of Robot Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, pp. 49-59, 1987.
- [2] A. Maruyama and M. Fujita, "Inverse Optimal H_∞ Disturbance Attenuation of Robotic Manipulators," *Proc. 1999 European Control Conference*, F806, 1999.
- [3] A. Jadbabaie, J. Yu and J. Hauser, "Stabilizing Receding Horizon Control of Nonlinear Systems : A Control Lyapunov Function Approach," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 1535-1539, 1999.
- [4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.