

ロボットダイナミクスと誤差システム

藤田研究室 見本 真一郎

平成 17 年 11 月 14 日

1 はじめに

一般的なロボットダイナミクスから誤差システムを構成することを目指す。

2 一般的なロボットダイナミクス

一般的に n 自由度のロボットダイナミクスは次式で表される。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1)$$

ここで, $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ はそれぞれの各関節の角度を表し, $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$ は入力トルク, $M(q) \in R^{n \times n}$ は正定な慣性行列, $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ は遠心力・コリオリ力項, $g(q) \in R^n$ は重力項を表す。

本研究では $n = 2$ の場合, つまり Fig. 1 のような 2 自由度マニピュレータを考える。ロボットダイナミクスの各要素は次のように与えられる。

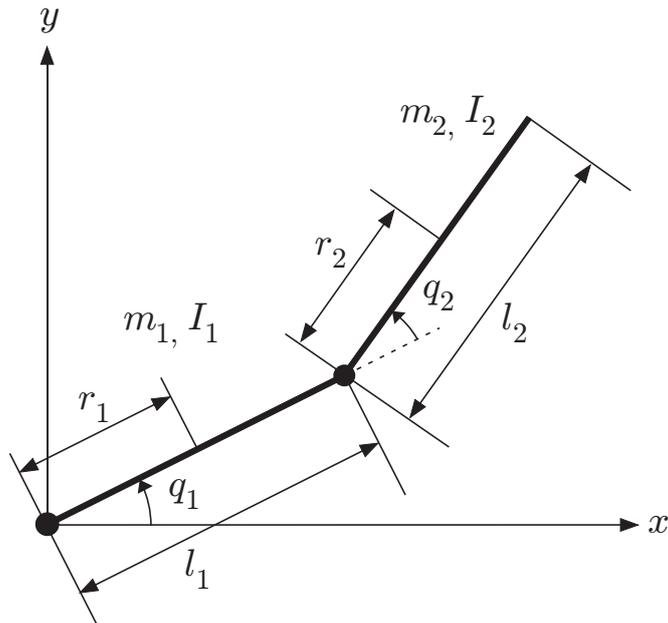


Fig.1: 2 自由度マニピュレータ

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 + 2R \cos q_2 & M_2 + R \cos q_2 \\ M_2 + R \cos q_2 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -R\dot{q}_2 \sin q_2 & -R(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ R\dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで, M_1, M_2, R の値は以下のとおりである. $m_i, I_i (i = 1, 2)$ をそれぞれ, リンク i の質量, リンク i の重心まわりの慣性モーメント, $l_i, r_i (i = 1, 2)$ をそれぞれ, リンク i の長さ, 第 i 関節の中心からリンク i の重心までの長さとする.

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1 = 6.5240 \times 10^{-1} \\ M_2 &= m_2 r_2^2 + I_2 = 3.7900 \times 10^{-2} \\ R &= m_2 l_1 r_2 = 4.1400 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

3 誤差システム

本研究では, ロボットの関節角度 q と関節角速度 \dot{q} を目標軌道 q_d と目標速度 \dot{q}_d に一致させる問題を考える. つまり偏差ベクトル $e = q - q_d$ としたとき, $e = 0, \dot{e} = 0$ を達成することを目的とする.

目的を達成するための入力トルクとして,

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) + u \quad (2)$$

を考える [1]. 式 (2) の右辺第一項から第三項は, ロボットダイナミクスに基づいて与えられた運動を実現するために必要なトルクの推定値を表し, 第四項の u は e をフィードバックしてコントローラによって生成された入力とする. Fig. 2 にこのシステムのブロック線図を示す. さらに Fig. 3 のように書き直すことで, 入力が u , 出力が e とする破線で囲まれた誤差システムとコントローラで構成されたシステムと見なすことができる.

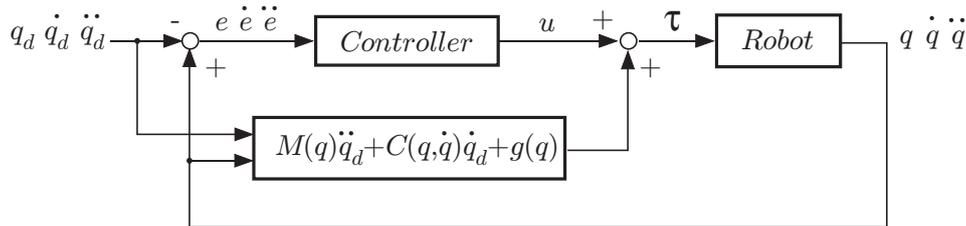


Fig.2: システムのブロック線図

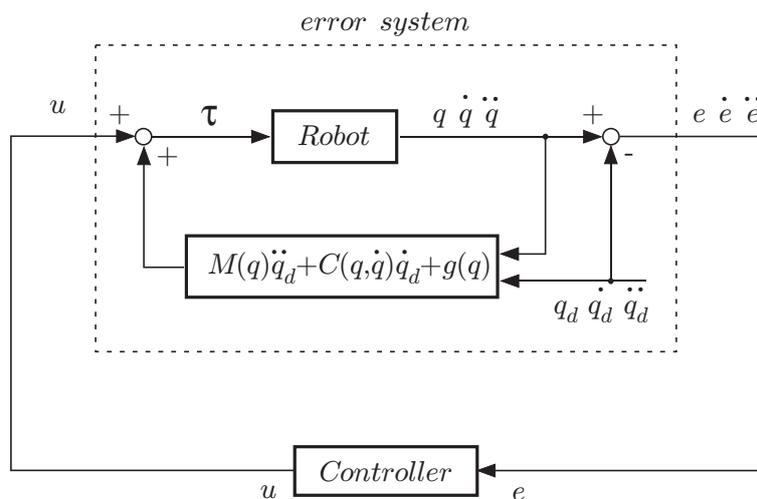


Fig.3: 誤差システムとコントローラで構成されたシステム

誤差システムのダイナミクスは、式 (1) と式 (2) より、次式のように表すことができる。

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} = u \quad (3)$$

したがって本研究の目的は、この誤差システム (3) に対して、 $e = 0$ 、 $\dot{e} = 0$ となるような入力 u を生成するコントローラを設計することに言い換えることができる。

4 誤差システムの状態空間表現

前節で求めた誤差システム (3) から、状態変数を

$$x = \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} + \Lambda e \end{bmatrix} \quad (4)$$

と置く [1]。ここで $\Lambda \in R^{2 \times 2}$ は正定行列である。状態 x によって状態空間表現を行うために、 \dot{x} を求める。 \dot{e} は

$$\dot{e} = -\Lambda e + s \quad (5)$$

と求まる。また式 (3) より

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{e} + M^{-1}(q)u \\ &= -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})(s - \Lambda e) + M^{-1}(q)u \\ &= -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})s - M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\Lambda e + M^{-1}(q)u \end{aligned} \quad (6)$$

となり、式 (5), (6) より、 \dot{s} は

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + \Lambda \dot{e} \\ &= -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})s + M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\Lambda e + M^{-1}(q)u + \Lambda(s - \Lambda e) \\ &= -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})s + M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\Lambda e + M^{-1}(q)u + \Lambda s - \Lambda^2 e \\ &= (M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\Lambda - \Lambda^2)e + (\Lambda - M^{-1}(q)C(q, \dot{q}))s + M^{-1}(q)u \end{aligned} \quad (7)$$

と求まる。式 (5), (7) より、以下のような状態空間表現を得る。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\Lambda e + s \\ (M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\Lambda - \Lambda^2)e + (\Lambda - M^{-1}(q)C(q, \dot{q}))s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} -\Lambda & I \\ M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\Lambda - \Lambda^2 & \Lambda - M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} -\Lambda & I \\ E(q, \dot{q})\Lambda & -E(q, \dot{q}) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$E(q, \dot{q}) = M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) - \Lambda \quad (9)$$

である。

システム (8) の状態 x を 0 に収束させることが出来れば、 $e, \dot{e} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となり、目的を達成することが出来る [2]。したがって最終的には、システム (8) の平衡点 $x = 0$ の漸近安定性を満たす入力 u を求めることが本研究の目的となる。

5 おわりに

一般的なロボットダイナミクスから誤差システムを構成した。また、本研究の目的を明確にした。

参考文献

- [1] A. Maruyama and M. Fujita, "Inverse Optimal H_∞ Disturbance Attenuation of Robotic Manipulators," *Proc. 1999 European Control Conference*, F806, 1999.
- [2] J. J. Slotine and W. Li, "On the Adaptive Control of Robot Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, pp. 49-59, 1987.